Vorlesung
Elliptische und Funktionen und Kurven

Prof. Dr. R.-P. Holzapfel

October 13, 2005

1 Die Liouvilleschen Sätze

Inhalt:

Meromorphe Funktionen auf einem Gebiet bilden einen Körper;
Definition von Gittern und elliptischen Funktionen;
1. Liouvillscher Satz: Elliptische Funktionen ohne Pole sind konstant;
2. Liouvillescher Satz: Elliptische Funktionen haben nur endlich viele Pole, die Summe der Residuen ist 0;
Definition der Ordnung einer elliptische Funktion, elliptische Funktionen der Ordnung 1 existieren nicht;
3. Liouvillscher Satz: Eine elliptische Funktion nimmt jeden Wert gleich oft an.

2 Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion

Inhalt:

Definition als Reihe, ihre Konvergenz, nach Weierstraß;
Beweis der meromorphen Eigenschaft, Bestimmung ihrer Pole und Laurent-Reihe;
Bestimmung der Ordnung von $\wp$ und ihrer Ableitung $\wp'$;
Halbwerte und die Nullstellen von $\wp'$;
Wann gilt $\wp(z) = \wp(w)$?
$\wp$ als Reihe mit Eisenstein-Reihen-Koeffizienten.

3 Der Körper der elliptischen Funktionen

Inhalt:

Vergleich mit dem Körper der geraden elliptischen Funktionen;
Die Pole der elliptischen Funktionen;
Zusammensetzung aller doppel-periodischen Funktionen als rationale Funktionen von $\wp$ und $\wp'$;

Differentialgleichung der Weierstraßschen $\wp$-Funktion;
Der Torus (Reifen) als algebraische Kurve.

4 Das Additionstheorem

Inhalt:

$\wp$-Werte bei Addition zweier Argumente, Verdoppelungsformel;
geometrische Interpretation der Addition.

5 Elliptische Integrale

Inhalt:

Die Umkehrfunktion eines elliptischen Integrals als elliptische Funktion;
Addition elliptischer Integrale und die Bogenlänge der Lemniskate.

6 Das Abelsche Theorem

Inhalt:

Exisenz einer elliptischen Funktion bei Vorgabe geeigneter Nullstellen und Pole;
Beweis mit Hilfe einer speziellen Theta-Reihe (σ-Funktion).

7 Die elliptische Modulgruppe

Inhalt:

Wirkung der reellen linearen Gruppe auf die Poincaré-Halbebene;
die unimodulare Gruppe und Gitter-Äquivalenz;
Eisenstein-Reihen, ihre Verwendung bei der Darstellung von Koeffizienten elliptischer Kurven und ihrer Diskriminanten.

8 Die Modulfunktion

Inhalt:

Beweis der Analytizität von Eisenstein-Reihen;
die Modulfigur und Fundamentalbereiche der unimodularen Gruppe;
Zusammenhang mit der Modulfunktion: ihre Surjektivität.