ORBITALE INVARIANTEN UND MODULFORMEN

R.-P. Holzapfel
Humboldt Universität, Berlin

2. Dez. 2005

1 Etwas "General Non-Sense"

$\mathcal{F}$ orbitale Kategorie:

$Ob(\mathcal{F})$, $Mor(\mathcal{F}) \supseteq EMor(\mathcal{F})$ "endliche Morphismen" (Teilkategorie),

Gradabbildung $\deg : \; EMor(\mathcal{F}) \to \mathbb{N}$, multiplikativ:

$$\deg(g \circ f) = \deg(f) \cdot \deg(g)$$

$f : \; Z \to Y$, $\; g : \; Y \to X$, endlich.

Orbitale Invarianten

Def inition 1.1 *Eine* **orbitale Invariante** *auf $\mathcal{F}$ in einer $\mathbb{Q}$-Algebra R ist eine gradverträgliche Abbildung $h : Obj(\mathcal{F}) \longrightarrow R$*, **d.h.**

$$h(Y) = \deg(f) \cdot h(X) = [Y : X] \cdot h(X)$$

für alle $f : Y \to X \in EMor(\mathcal{F})$.

Funktoriell: $\mathcal{F} \longrightarrow (R, \cdot)^{opp}$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & h(Y) \\
X \arrow[r] & h(X) \arrow[u, "\cdot \deg(f)"']
\end{tikzcd}$$

Bergmann-Volumina

$\mathbb{B} = G/K \subset \mathbb{P}^N$ hermitischee symmetrischer Gebiet, G Lie-Gruppe (zusammenhängend), K maximale kompakte Untergruppe,

$$Ob\mathcal{F}: \ X_\Gamma \ := \Gamma\backslash\mathbb{B}, \ \Gamma \text{ Gitter},$$

d.h. diskrete Untergruppe von $Aut_{hol}\mathbb{B}$ mit endlichem Kovolumen (Γ-Fundamentalbereich hat endliches Volumen bzgl. G-invarianter Metrik auf $\mathbb{B}$ (Bergmann-Metrik).

$EMor(\mathcal{F})$: endliche Überlagerungen $X_{\Gamma_1} \to X_{\Gamma_2}$, induziert durch Inklusionen $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$.

Fixiere G-invariante Volumenform auf $\mathbb{B}$.
Das Kovolumen ist eine orbitale Invariante für $\mathcal{F}$ in $\mathbb{R}$:

$$Ob(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$X_\Gamma \to vol(\Gamma)$$

(Volumen eines Γ-Fundamentalbereiches)

$$vol(\Gamma_1) = [X_{\Gamma_1} : X_{\Gamma_2}] \cdot vol(\Gamma_2) = [\Gamma_2 : \Gamma_1] \cdot vol(\Gamma_2),$$

für Gitter $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$.

2 Eine analytische orbitale Invariante

$$\mathbb{P}^n \supset \mathbb{B}^n : \ |z_1|^2 + ... + |z|^2 < 1,$$

n-dimensionaler komplexer **Einheitsball**

Wirkung der **unitären Gruppe** $\mathbb{U}((n,1),\mathbb{C}) \subset \mathbb{G}l_{n+1}(\mathbb{C})$, **Picardsche Modulgruppe** des imaginär quadratischen Zahlkörpers K: kommensurabel mit der

vollen Picardschen Modulgruppe

$$\Gamma_K = \mathbb{SU}((n,1),\mathfrak{O}_K) \ := \mathbb{U}((n,1),\mathbb{C}) \cap \mathbb{S}l_{n+1}(\mathfrak{O}_K),$$

$\mathfrak{O}_K$ Ring der ganzen Zahlen in K.

Effektive wirkend:

$$\mathbb{PU}((n,1),\mathfrak{O}_K) = \mathbb{P}\Gamma_K.$$

Picardsche Modulvarietät: $X_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{B}^n$, Γ eine Picardsche Modulgruppe (effektiviert); quasiprojektive Varietät, existiert "kleinste" algebraische Kompaktif izierung, die **Baily-Borel Kompaktif izierung** $\hat{X}_\Gamma$, projective normale Varietät;

Orbitale Kategorie $Pic = Pic^n$ (bei f ixiertem n).

Orbitale Teilkategorien zu Kongruenzuntergruppen (vollständig):

Kongruenzuntergruppe $\Gamma(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_K$ Ideal, abgeschlossen unter komplexer Konjugation:

$$0 \to \Gamma(\mathfrak{a}) \to \Gamma = \Gamma_K \to \mathbb{SU}((n,1), \mathcal{O}_K/\mathfrak{a}) \text{ exact}$$

Natürliche Kongruenzuntergruppen:
$\mathfrak{a} = m\mathcal{O}_K$, $m \in \mathbb{N}_+$.

Pic^{nat}, Objekte: $X_\Gamma(m) \ := \Gamma(m)\backslash\mathbb{B}$ bzw. $\hat{X}_\Gamma(m)$

Picardsche natürliche Kongruenzvarietäten der Dimension n.

Gemischte Euler-Produkte

n = 2, Picardsche Modulf lächen,

$D_K \ := D_{K/\mathbb{Q}}$ **Diskriminante,**

$$L(s, \chi_K) = \prod_p (1 - \frac{\chi_K(p)}{p^s})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_K(n)}{n^s}$$

Dirichletsche L-Reihe von K

mit Dirichlet-Character

$\chi_K(n) = (\frac{D_K}{n}) \in \{0, \pm 1\}$ **(Jacobi symbol)**

Produkt-Abschnitte

$$\zeta^{(m]}(s) := \prod_{p|m} (1 - \frac{1}{p^s})^{-1};$$

$$L^{[m)}(s, \chi_K) := \prod_{p\nmid m} (1 - \frac{\chi_K(p)}{p^s})^{-1}$$

$$\delta_{K,m} := \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{if } 2 \mid m, D_K, \\ 1, & \text{else}; \end{cases}$$

gemischtes Euler-Produkt: $\zeta^{(m]}(s)^{-1} \cdot L^{[m)}(s, \chi_K)$,

Theorem 2.1 *(Dzambic, H., 2005):*
Die Abbildung (Funktor)

$$X_{\Gamma_K}(m) \mapsto \delta_{K,m} \cdot m^8 \cdot \prod_{p|m}(1 - \frac{1}{p^2}) \cdot \prod_{p\nmid m}(1 - \frac{\chi_K(p)}{p^3})^{-1}$$

ist eine orbitale Invariante

$$Pic^{nat} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

für natürliche Picardsche Kongruenzf lächen.

3 Alg.-geom. Erweiterung

Ablösung von Singularitäten:

Ablösung ist eine spezielle Modif ikation: Ersetzen von Flächen-Punkten durch jeweils eine glatte Kurve, so daß sich die Flächen-Singularitäten vereinfachen zu aussschließlich abelschen (zyklischen) Quotienten-Singularitäten.

Eindeutig für nicht-zyklische Singularitäten.

Flächen, für die eine solche Ablösung existiert, sowie die abgelösten Singularitäten heißen

ablösbar.

Eigenschaften

1. verträglich mit endlichen (Überlagerungs-) Morphismen von $Pic = Pic^2$.

$$\begin{tikzcd} X'_{\Gamma_1} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{X}_{\Gamma_1} \arrow[d] \\ X'_{\Gamma_2} \arrow[r] & \widehat{X}_{\Gamma_2} \end{tikzcd}, \qquad \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2;$$

2. Ablösung ist minimale Singularitätenauf lösung für Spitzenpunkte reiner Kongruenzf lächen (neat).

3.) σ-Prozess für glatte F lächenpunkte;

4.) Auf lösung der Kurvensingularitäten der Verzweigungskurve von $\mathbb{B} \to \Gamma \backslash \mathbb{B}$.

Ablösungs-Morphismen $X'_\Gamma \to \hat{X}_\Gamma$, birational, partielle Singularitäten-Auf lösungen, abgelöste Objekte X'_Γ bilden orbitale Kategorie Pic'.

Zusammen mit: $\widehat{Pic}$ (alle $\widehat{X_\Gamma}$), $\overset{o}{Pic}$ (alle $X_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{B}$) neue orbitale Kategorie $Pic = Pic^2$.

$EMor(Pic)$: alle durch $\Gamma_1 \supseteq \Gamma_2$ induzierten endlichen Morphismen.

Orbitale Flächen

(Natürlich) **gewichtete F lächen** (Uludag):

$$\mathbf{X} := (X, w), \; w : X \to \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\},$$

X algebraische/analytische F läche, w wird **Gewichts-Abbildung** genannt.

Galois Gewichte

Y glatte F läche, Gruppe G wirke eigentlich diskontinuierlich (lokal endlich) auf Y, $X = Y/G$ Quotientenf läche, hat höchstens Quotienten-Singularitäten.

$$w_G : X \longrightarrow \mathbb{N}_+, \quad x = yG \mapsto \#Stab_G(y) < \infty;$$

$\mathbf{X} = (X, w_G)$ **Galois-gewichtete orbitale F läche**;

Beispiel 3.1 $\mathbf{X}_\Gamma = \mathbf{\Gamma}\backslash\mathbb{B}$ **offene orbitale Picard-F läche**, Γ *Picardsche Modulgruppe.*

Galois-endliche Morphismen: $\mathbf{Y} \to \mathbf{X}$:

$\mathbf{Y} = (Z/H, w_H)$, $\mathbf{X} = (Z/G, w_G)$, Z glatte F läche, $H \subseteq G \subseteq$ Aut Z, getragen von endlicher Überlagerung $Y \to X$.

Orbitale Morphismen: getragen von Galois-endlichen, offenen (analytischen) Einbettungen, Ablösungen, Kompositionen aus allen.

Beispiel 3.2 *Orbitale Isomorphien.*

Erweiterung: Zusammenklebungen von orbitalen Objekten bzw. Morphismen.

endliche orbitale Morphismen: lokal Galois-endlich.

Beispiel-Diagramm

Orbitale Kategorie $\mathbf{Pic}$: getragen von Objekten aus Pic.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X}'_{\Gamma_1} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathbf{X}}_{\Gamma_1} \arrow[d] \\ \mathbf{X}'_{\Gamma_2} \arrow[r] & \widehat{\mathbf{X}}_{\Gamma_2} \end{tikzcd} , \qquad \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2;$$

horizontal: orbitale Ablösungen,
vertikal: endliche orbitale Morphismen,

Ablösungs-Gewichte

Zur gegebenen Picardschen Modulgruppe Γ_2 existiert reiner (neat) Normalteiler Γ_1 von endlichem Index: X'_{Γ_1} glatt,

$$\begin{array}{ccc} X'_{\Gamma_1} & \longrightarrow & \widehat{X}_{\Gamma_1} \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \mathbf{X}'_{\Gamma_2} & \longrightarrow & \widehat{\mathbf{X}}_{\Gamma_2} \end{array} , \qquad \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2;$$

oben: "triviale Gewichte" (= 1) auf X_{Γ_1},
unten: Galois-Gewichte auf X_{Γ_2},
∞ für Kompaktif izieruns-Punkte.

Orbitale Picard-Kategorie

Objekte: orbitale Picard-Flächen $\mathbf{X}'_\Gamma$, $\widehat{\mathbf{X}}_\Gamma$, $\mathbf{X}_\Gamma$,
Morphismen (-Halbgruppe), erzeugt durch

- offene orbitale Einbettungen $\mathbf{X}_\Gamma \hookrightarrow \widehat{\mathbf{X}}_\Gamma$,
  orbitale Ablösungen $\mathbf{X}'_\Gamma \to \widehat{\mathbf{X}}_\Gamma$,
- orbital endliche: $\mathbf{X}_{\Gamma_1} \to \mathbf{X}_{\Gamma_2}$, $\widehat{\mathbf{X}}_{\Gamma_1} \to \widehat{\mathbf{X}}_{\Gamma_2}$,
  $\mathbf{X}'_{\Gamma_1} \to \mathbf{X}'_{\Gamma_2}$, $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ von endlichem Index.

Γ, Γ_1, Γ_2 Picard modular.

Bezeichnung der orbitalen Kategorie: $\mathbf{Pic}$.

Erweiterung der orbitalen gemischten Euler-Produkt-Invar.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Pic}^{nat} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R}(gem.Eul - Pr.) \\ \mathbf{Pic} \arrow[ur, "algebr.-geom."'] & \end{tikzcd}$$

Explizit, über Ablösungen,
Berechenbarkeit topologischer Invarianten:
Euler-Zahl, Signatur, arithmetisches Geschlecht
Picardscher Modulf lächen.

Proportionalitäts-Theory, äquivariante K-Theorie.

Beispiele orbitaler Picard-Flächen:

1.) $\Gamma = \mathbb{P}\Gamma_K(\sqrt{-3})$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ Eisenstein-Zahlen, $\hat{X}_\Gamma = \mathbb{P}^2$ projektive Ebene; gewichted (nichttrivial): **Orbitale Picard-Eisenstein-Ebene** $\hat{\mathrm{X}}_\Gamma$ with **orbitalem Picard-Zyklus** gtragen von 6 Geraden durch 4 Punkte in allgemeiner Lage.

2.) $\Gamma = \mathbb{P}\Gamma_K(1+i)$, $K = \mathbb{Q}(i)$ Gaußsche Zahlen, $\hat{X}_\Gamma = \mathbb{P}^2$ projektive Ebene; gewichted (nichttrivial): **Orbitale Picard-Gauß-Ebene** $\hat{\mathrm{X}}_\Gamma$ mit **orbitalem Apollonius-Zyklus** getragen von einer Quadrik und drei Tangenten.

4 Orbitale Picard-Kurven

Explizite Orientierung: Plücker-Formeln für ebene projektive Kurven C mit (höchstens) Kurven-Spitzen oder transversalen Selbstschnitten (Doppelpunkte) als singulären Punkten. Plücker-Relation:

$$d(d-1) - 2\delta - 3\kappa = d^* = 2d + (2g-2) - \kappa, \quad (1)$$

g: Kurven-Geschlecht, d: Grad von C, d^* (Anzahl der Tangenten durch einen äußeren allgemeinen Punkt; δ: Anzahl der Doppelpunkte von C;
κ: Anzahl der Kurven-Spitzen.
Vergiß' d^*: Relation zwischen Grad d,
Geschlecht g, δ und κ.

Γ Picardsche Modulgruppe des Körpers K, $\mathbb{D} \subset \mathbb{B}$ K-linear eingebettete vollständige Scheibe; $D_\Gamma := \Gamma\backslash\mathbb{D} \subset X_\Gamma$ ist eine algebraischec Kurve auf der Picardschen Modulf läche X_Γ. Sie wird (Flächen-eingebettete) **Picard curve** genannt. Modelle: $D_\Gamma \subset X_\Gamma$ (open), Kompaktif izierungen: $\hat{D}_\Gamma \subset \hat{X}_\Gamma$, $D'_\Gamma \subset X'_\Gamma$. Eine **orbitale Picard curve** ist ein Paar $\mathbf{D}_\Gamma := (\mathbf{U}, D_\Gamma)$, wobei U eine offene Umgebung von D_Γ auf X_Γ. Wir unterscheiden diese Objekte nicht, wenn wir zu kleineren Umgebungen übergehen.

Genauer:
Die orbitalen Picard-Kurven $\mathbf{D}_\Gamma$, $\hat{\mathbf{D}}_\Gamma$, $\mathbf{D}'_\Gamma$ sind Keime orbitaler Picard-F¨ächen längs der Picard-Kurven. Letztere sind Shimura-Kurven, (übrigens def iniert über $\bar{\mathbb{Q}}$).

Kategorie $\mathbf{Pic}^1$ der orbitale Picard-Kurven:
Objekte wie oben;
(orbitale) Morphismen: induziert durch (orbitale) Morphismen von $\mathbf{Pic}$ durch Einschränkung auf Kurven-Umgebungen (alles gewichtet).

$\mathbf{Pic}^1$ bezeichnet die Kategorie der orbitalen Picard-Kurven.
Wir benötigen weitere Ablösungen zur algebraisch-geometrischen Konstruktion orbitaler Invarianten von $\mathbf{Pic}^1$.

Def inition 4.1 *Seien* $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{B}$*,* Γ *wie oben; Wir nennen* Γ $\mathbb{D}$**-rein***, gdw.* Γ *rein ist, und für alle* $\gamma \in \Gamma$ *gilt:* $\gamma(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ *oder* $\gamma(\mathbb{D}) \cap \mathbb{D} = \emptyset$*.*

$P \in \mathbb{D}$ ist ein Γ**-kritischer Punkt**, gdw. es ein Element $\gamma \in \Gamma$ gibt, so daß: $\gamma(\mathbb{D}) \neq \mathbb{D}$ und $P \in \gamma(\mathbb{D}) \cap \mathbb{D}$.

z.B. $\Gamma_{\mathbb{D}}$-Fixpunkt auf $\mathbb{D}$ (elliptischer Punkt).

Die Bildpunkte von Γ-Kritischen Punkten von $\mathbb{D}$ auf der Picardschen Modulkurve D_Γ heißen **kritische Kurvenpukte**.

Satz 4.2 *Für jede Scheibe $\mathbb{D} \subset \mathbb{B}$ enthält die Picardsche Modulgruppe Γ (alles wie oben) einen $\mathbb{D}$-reinen Normalteiler Γ_0 von endlichem Index.*

Satz 4.3 *Jede offene Picardkurve D_Γ hat nur endlich viele kritische Punkte.*

Korollar 4.4 *Jede Picardsche Modulkurve $D_\Gamma \subset X_\Gamma$ hat eine endliche Überlagerung $D_{\Gamma_0} \subset X_{\Gamma_0}$ ohne kritische Punkte.*

Kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} D_{\Gamma_0} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{Galois}"] & X_{\Gamma_0} \arrow[d] \\ D_\Gamma \arrow[r] & X_\Gamma \end{tikzcd} \text{ Gewicht } 1 \quad , \quad \begin{tikzcd} D_{\Gamma_0} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{Galois}"] & X_{\Gamma_0} \arrow[d] \\ \mathbf{D}_\Gamma \arrow[r] & \mathbf{X}_\Gamma \end{tikzcd}$$

Ablösungen: $$\begin{tikzcd} D'_{\Gamma_0} \arrow[r, "\sigma' s"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{Galois}"] & \hat{D}_{\Gamma_0} \arrow[d] \\ \mathbf{D}'_\Gamma \arrow[r] & \hat{\mathbf{D}}_\Gamma \end{tikzcd} \text{ Gewicht } 1$$

σ-Prozeß in jedem Punkt von X_{Γ_0}, der über einem kritischen Punkt auf D_Γ liegt. unten: Galois Gewichte (korrekt)

Effekte:

1.) Kompaktif izierung $\mathbf{D}'_\Gamma$;

2.) Auf lösung der Kurven-Singularitäten von $\hat{D}_\Gamma$;
3.) Kurven-Singularitäten werden "abgelöst"
durch abelsche F lächen-Singularitäten,
gespeichert auf $\mathbf{D}'_\Gamma$.

Alle neu-konstruierten orbitalen Objekte, Einbettungen, Überlagerungen, Ablösungen in die Kategorie $\mathbf{Pic}^1$ **orbitaler Picard Kurven** aufnehmen.

Theorem 4.5 *Es existieren zwei algebraisch-geometrisch konstruierte orbitale Invarianten*

$$\mathbf{Self}: \mathbf{Pic}^1 \to \mathbb{Q},$$

$$\mathbf{Eul}: \mathbf{Pic}^1 \to \mathbb{Q},$$

Sie heißen **orbitale Selbstschnitt-** *bzw.* **orbitale Euler-Invariante***.*

Rational modif izierte Selbstschnitte bzw. Euler-zahlen glatter kompakter Flächen-Kurven.

Explizit auf Ablösungen.

5 Relativ-Orbitale Proportionalität:

Theorem 5.1 *Die beiden orbitalen Invarianten sind $\mathbb{Q}$-linear abhängig. Genauer gilt die folgende* **Orbitale Proportionalitäts-Relation***:*

$$\mathbf{Eul} = 2 \cdot \mathbf{Self}$$

auf $\mathbf{Pic}^1$.

Weitere orbitale Invarianten:

$$0 \neq \mathbf{h} : \ \mathbf{Pic^1} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

erfüllen, nach Def inition, orbitale Gradformel

$$\mathbf{h}(\mathbf{D}) = [\mathbf{D} : \mathbf{C}] \cdot \mathbf{h}(\mathbf{C})$$

mit orbitalem Grad

$$[\mathbf{D} : \mathbf{C}] \ := \frac{w(\mathbf{D})}{w(\mathbf{C})} \cdot [C : D]$$

für orbital endliche Morphismen $\mathbf{D}/\mathbf{C}$.

6 Arithmetisch-orbitale-Divisoren

$\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathrm{Div}^{\mathrm{ar}}\hat{\mathbf{X}}_{\boldsymbol{\Gamma}}$ der **orbitalen Divisoren**: erzeugt durch alle (arithmetischen) orbitalen Picard-Kurven auf $\hat{\mathbf{X}}_{\boldsymbol{\Gamma}}$. Die rationalen Schnitt-produkte irreduzibler Kurven auf normalen kompakten F lächen (Mumford, Fulton) werden orbitalisiert und $\mathbb{Q}$-linear fortgesetzt zu **orbitalen Schnittprodukten**

Def inition 6.1 $< \cdot >$: $\mathrm{Div}^{\mathrm{ar}}\hat{\mathbf{X}} \times \mathrm{Div}^{\mathrm{ar}}\hat{\mathbf{X}} \longrightarrow \mathbb{Q}$ durch

$$< \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{D}} > := \frac{<\hat{C}\cdot\hat{D}>}{w(\hat{\mathbf{C}})w(\hat{\mathbf{D}})}.$$

Für endliche orbitale Überlagerungen $\mathbf{f}: \hat{\mathbf{Y}} \to \hat{\mathbf{X}}$ in $\mathbf{Pic}^2$ hat man auch $\mathbb{Q}$-lineare orbitale direkte und inverse Bild- Homomorphismen

$$\mathbf{f}_{\#}: \mathbf{Div}^{\mathbf{ar}}\hat{\mathbf{Y}} \longrightarrow \mathbf{Div}^{\mathbf{ar}}\hat{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{f}^{\#}: \mathbf{Div}^{\mathbf{ar}}\hat{\mathbf{X}} \longrightarrow \mathbf{Div}^{\mathbf{ar}}\hat{\mathbf{Y}}$$

Einschränkend auf orbitale endliche Überlagerungen orbitaler Picard-Kurven $\hat{\mathbf{D}}/\hat{\mathbf{C}}$. Erstere werden def iniert durch

$$\mathbf{f}_{\#}\hat{\mathbf{D}} := [\hat{\mathbf{D}} : \hat{\mathbf{C}}] \cdot \hat{\mathbf{C}}, \quad (\hat{C} = f(\hat{D})).$$

Das orbital inverse Bild von $\hat{\mathrm{C}}$ ist nichts anderes als der reduzierte Urbild- Divisor $f^{-1}C$, komponentenweise versehen mit den Gewichten auf $\hat{\mathrm{Y}}$. In orbitaler Schreibweise setzen wir

$$\mathbf{f}^{\#}\hat{\mathbf{C}} := \mathbf{f}^{-1}\hat{\mathbf{C}}.$$

Projektions-Formel:

$$< \mathbf{f}_{\#}\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} > = < \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}^{\#}\mathbf{A} >$$

für alle arithmetischen orbitalen Divisoren $\mathbf{A}$ auf $\hat{\mathrm{Y}}$ bzw. $\mathbf{B}$ auf $\hat{\mathrm{X}}$.

Normen

Für $V \in \mathcal{O}_K^3$, $< V, V >$ positiv bzgl. der hermiteschen $(2,1)$-Metrik, die den Ball $\mathbb{B} = \mathbb{P}((\mathbb{R} \otimes V)^-)$ def iniert, sei

$$\mathbb{D}_V = \mathbb{P}(V^\perp) \cap \mathbb{B} \text{ (Scheibe)}$$

Def inition 6.2 *Wir sagen, daß $N \in \mathbb{N}_+$ eine* **Norm** *von $\hat{D}_\Gamma$ ist, gdw. $D_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{D}_V$ und $N = < V, V >$. Die* **Norm-Menge** *(unendlich) von $\hat{D}_\Gamma$ ist:*

$$\mathcal{N}(\hat{D}_\Gamma) := \{N \in \mathbb{N}_+;\ \text{ex. } V \in \mathcal{O}^3, D_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{D}_V,$$
$$< V, V > = N\}.$$

Def inition 6.3 *Für* $N \in \mathbb{N}_+$ *wird der (reduzierte) Weil-Divisor*

$$H_N = H_N(\hat{X}_\Gamma) := \sum_{N \in \mathcal{N}(\hat{D}_\Gamma)} \hat{D}_\Gamma$$

N*-ter* **Heegner-Divisor** *auf* $\hat{X}_\Gamma$ *genannt. Mit den Gewichten auf* $\hat{\mathbf{X}}_\Gamma$ *erhalten wir den N-ten* **orbitalen Heegner-Divisor** $\mathrm{H}_\mathbf{N} = \mathrm{H}_\mathbf{N}(\hat{X}_\Gamma)$ *auf* $\hat{\mathbf{X}}_\Gamma$*.*
Wir führen die **orbitalen Heegner-Funktionale**

$$\mathbf{h}_N : \ \mathbf{Div}\ \hat{\mathbf{X}}_\Gamma \longrightarrow \mathbb{Q}, \ \hat{\mathbf{C}} \mapsto < \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{H}_N >,$$

ein.

Theorem 6.4 *Dual erhalten wir unendlich viele orbitale Invarianten*

$$\mathbf{h}_N = <\,.\,,\mathbf{H}_N >:\ \mathbf{Pic}^1 \longrightarrow \mathbb{Q},$$

eine für jedes natürliche $N > 0$*.*

Beweis : über orbitales direktes und inverses Bild, längs endlicher orbitaler Überlagerungen (orbitale Projektionsformel).

Zusätzlich setzt man:

$$\mathbf{h}_0 := \mathbf{Eul}.$$

7 Modul-Formen

Frage: Sind die $\mathbf{h}_N$ algebraisch oder linear abhängig ?

Für jede orbitale Picard-Kurve $\hat{\mathbf{D}}_\Gamma$ def inieren wir im Ring der formalen Potenzreihen $\mathbb{Q}[[q]]$ die **Heegner-Reihe**

$$\mathbf{Heeg}_{\hat{\mathbf{D}}_\Gamma} := \sum_{N=0}^{\infty} \mathbf{h}_N(\hat{\mathbf{D}}_\Gamma) \cdot q^N,$$

Zusammengefaßt erhalten wir:

Theorem 7.1

$$\mathbf{Pic}^1 \longrightarrow \mathbb{Q}[[q]], \; \hat{\mathbf{D}}_\Gamma \mapsto \mathbf{Heeg}_{\hat{\mathbf{D}}_\Gamma}$$

ist eine orbitale Invariante mit Werten im obigen Ring der formalen Potenzreihen.

Wir erinnern an die klassischen Kongruenz-Untergruppen

$$\Gamma_0(m) \ := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{S}l_2(\mathbb{Z});\ c \equiv 0 \; mod \; m\}$$

der Modulgruppe $\mathbb{S}l_2(\mathbb{Z})$, die auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ wirkt. Ebenso an die (Dirichlet) Charaktere $\chi = \chi_K : \mathbb{Z} \to \{0, \pm 1\}$ der quadratischen Zahlkörper K. Sie faktorisieren durch die Restklassenringe der Körper-Diskriminanten. Eine holomorphe Funktion $f = f(\tau)$, $\tau \in \mathbb{H}$, wird **Modulform** vom Gewicht $k \in \mathbb{N}$, Niveau $m \in \mathbb{N}$, und vom Nebentypus χ genannt, wenn sie folgende Funktional-Gleichungen erfüllt:

$$f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^k \chi(d)^k f(\tau) \quad \forall \ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(m);$$

(und f setzt sich regulär auf alle Spitzen fort). Der Raum dieser Modulformen wird mit $\mathcal{M}_k(m,\chi)$ bezeichnet. Es ist ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Beispiel 7.2 . *Gewicht* $k = 3$, *Niveau* $m = 4 = |D_{K/\mathbb{Q}}|$, *Dirichlet- Charakter* $\chi = \chi_K$ *des Gauß schen Zahlkörpers* $K = \mathbb{Q}(i)$.

$$\mathcal{M}_3(4, \chi) = \mathbb{C}\vartheta^6 + \mathbb{C}\vartheta^2\theta$$

mit

$$\vartheta := \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} = 1 + 2\sum_{n>0} q^{n^2}, \qquad \textit{(Jacobi)},$$

$$\theta := \sum_{0<u \text{ odd}} \sigma(u) q^u = q \cdot \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{4m})^4 \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^n)^4,$$

(Hecke).

Heegner-Reihe von $\hat{\mathrm{C}}$:

$$\mathbf{Heeg}_{\hat{\mathrm{C}}}(\tau) \ := \sum_{N=0}^{\infty} \mathbf{h}_N(\hat{\mathbf{C}}) \cdot q^N, \, q = \exp(2\pi i\tau),$$

$$Im \ \tau > 0$$

Theorem 7.3 *Die Heegner-Reihen sind elliptische Modulformen aus* $\mathcal{M}_3(D_{K/\mathbb{Q}}, \chi_K)$.

Zum Beweis nutzen wir die orbitale Eigenschaft für Heegner-Reihen. Wir f inden in jedem Falle eine $\mathbb{D}$-reine endliche Überlagerung von $\hat{\mathrm{C}} = \widehat{\boldsymbol{\Gamma}\backslash\mathbb{D}}$. Auf diesem reinen Niveau erhalten wir eine "Kudla-Cogdell-Reihe", welche bereits als Modulform des genannten Typs bekannt ist. Teilen wir durch den orbitalen Grad, so bleibt diese Qualität für die Ausgangsreihe erhalten.

Korollar 7.4 *Für einen festen Körper K ist der $\mathbb{Q}$-Vectorraum, der durch alle Heegner-Modulformen* $\mathbf{Heeg}_{\hat{\mathbf{D}}_\Gamma}$, $\hat{\mathbf{D}}_\Gamma \leftharpoonup \hat{\mathbf{X}}_\Gamma \in \mathbf{Pic}^1_K$, *erzeugt wird, endlich-dimensional.*

Beweis : $\mathcal{M}_3(D_{K/\mathbb{Q}}, \chi_K)$ ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum.

Korollar 7.5 *Die orbitale Heegner-Reihe* $\mathbf{Heeg}_{\hat{\mathbf{D}}_\Gamma}(\tau)$ *ist eindeutig bestimmt durch* $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_3(D_{K/\mathbb{Q}}, \chi_K)$ *ihrer (ersten) Fourier-Koeff izienten.*

Ablesbar von orbitaler F läche:

Picard-Apollonius-Beispiel

$$\mathcal{M}_3(4,\chi) \ni \mathbf{Heeg}_{\hat{\mathrm{D}}}(\tau)$$

$$= -\frac{1}{8}\cdot\vartheta^6 - \frac{17}{2}\cdot\vartheta^2\theta,$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty}\left((\frac{3N}{2} - \frac{1}{8})a_2(N) + 3\sum_{m=1}^{N}\sigma(m)a_2(N-m)\right) q^N.$$

$\hat{\mathrm{D}}$: gewichtete Quadrik des orbitalen Apollonius Zyklus der the projectiven Ebene;

$\sigma(m)$: Summe der Teiler von m;

$a_2(k)$: Anzahl der $\mathbb{Z}$-Lösungen von $x^2 + y^2 = k$.

Orbitale Hilbert-F lächen

Heegner-Reihen (analog konstruiert) liegen in $\mathcal{M}_2(D_{K/\mathbb{Q}}, \chi_K)$.

Für reine Modulgruppen erhält man Hirzebruch-Zagier-Reihen.

Beispiel. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\hat{\mathrm{C}}$: gewichtete Kreislinie im orbitalen "Cartesius-Zyklus der projectiven (orbitalen Hilbert-)Ebene:

$$\mathbf{Heeg}_{\hat{\mathrm{C}}}(\tau) = -1+2\cdot\sum_{N=1}^{\infty}\left(\sum_{d|N}\chi_K(d)d\right)q^N \in \mathcal{M}_2(8,\chi),$$

(Eisenstein-Reihe)

Zusammenfassung:

Explizite Konstruktion von Heegner-Reihen:

1.) Präzise Klassif ikation orbitaler Picard-F lächen $\hat{\mathbf{X}}_\Gamma$;

2.) Finde eine Basis von $\mathcal{M}_3(D_{K/\mathbb{Q}}, \chi_K)$;

3.) Bestimme alle $\hat{\mathbf{D}}_1, ..., \hat{\mathbf{D}}_r$ auf $\hat{\mathbf{X}}_\Gamma$ von kleiner Norm;

4.) Berechne die ersten Fourier-Koeff izienten von $\mathbf{Heeg}_{\hat{\mathbf{D}}}(\tau)$ mit Hilfe von $\mathbf{Self}(\hat{\mathbf{D}})$ und orbitalen Schnittzahlen von $\hat{\mathbf{D}}$ mit $\hat{\mathbf{D}}_1, ..., \hat{\mathbf{D}}_r$.

Geometrische Interpretation:

Abzählung (mit $\deg$-Multiplizität) orbitaler Picard-Kurven fester Norm N auf einer orbitalen Picard-Fläche.

Speziell auf orbitalen Picard-Ebenen gilt

$$\mathbf{Heeg}_{\hat{\mathbf{D}}}(\tau) = 2 \cdot \mathbf{Self}(\hat{\mathbf{D}}) + \mathbf{deg}\ \hat{\mathbf{D}} \cdot \sum_{N=1}^{\infty} (\mathbf{deg}\ \mathbf{H_N}) q^N$$

mit **ebenen orbitalem Kurven-Grad**

$$\mathbf{deg} = \frac{\mathbb{P}^2\text{−}Kurvengrad}{orbitales\ Kurvengewicht}$$

für irreduzible orbitale ebene Kurven (linear fortsetzen).