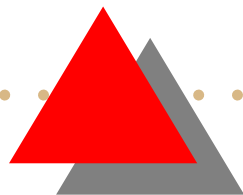




ORBITALE INVARIANTEN UND
MODULFORMEN

R.-P. Holzapfel
Humboldt Universität, Berlin

2. Dez. 2005





1 Etwas "General Non-Sense"

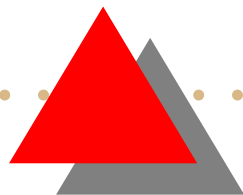
\mathcal{F} orbitale Kategorie:

$Ob(\mathcal{F}), Mor(\mathcal{F}) \supseteq EMor(\mathcal{F})$ "endliche Morphismen" (Teilkategorie),

Gradabbildung $\deg : EMor(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{N}$,
multiplikativ:

$$\deg(g \circ f) = \deg(f) \cdot \deg(g)$$

$f : Z \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$, endlich.





Orbitale Invarianten

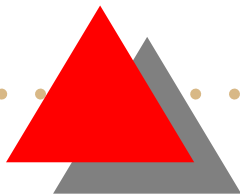
Definition 1.1 Eine orbitale Invariante auf \mathcal{F} in einer \mathbb{Q} -Algebra R ist eine gradverträgliche Abbildung $h : \text{Obj}(\mathcal{F}) \longrightarrow R$, d.h.

$$h(Y) = \deg(f) \cdot h(X) = [Y : X] \cdot h(X)$$

für alle $f : Y \rightarrow X \in \text{EMor}(\mathcal{F})$.

Funktoriiell: $\mathcal{F} \longrightarrow (R, \cdot)^{\text{opp}}$

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & h(Y) \\ f \downarrow & & \uparrow \cdot \deg(f) \\ X & \longrightarrow & h(X) \end{array}$$



Bergmann-Volumina


$\mathbb{B} = G/K \subset \mathbb{P}^N$ hermitischee symmetrischer Gebiet, G Lie-Gruppe (zusammenhängend), K maximale kompakte Untergruppe,

$Ob\mathcal{F} : X_\Gamma := \Gamma \backslash \mathbb{B}$, Γ Gitter,

d.h. diskrete Untergruppe von $Aut_{hol}\mathbb{B}$ mit endlichem Kovolumen (Γ -Fundamentalebereich hat endliches Volumen bzgl. G -invarianter Metrik auf \mathbb{B} (Bergmann-Metrik).

$EMor(\mathcal{F})$: endliche Überlagerungen $X_{\Gamma_1} \rightarrow X_{\Gamma_2}$,

induziert durch Inklusionen $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$.



Fixiere G -invariante Volumenform auf \mathbb{B} .
Das Kovolumen ist eine orbitale Invariante für \mathcal{F}
in \mathbb{R} :

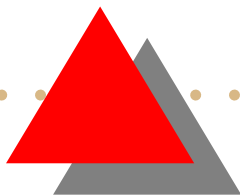
$$Ob(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$X_\Gamma \longrightarrow vol(\Gamma)$$

(Volumen eines Γ -Fundamentalbereiches)

$$vol(\Gamma_1) = [X_{\Gamma_1} : X_{\Gamma_2}] \cdot vol(\Gamma_2) = [\Gamma_2 : \Gamma_1] \cdot vol(\Gamma_2),$$

für Gitter $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$.



2 Eine analytische orbitale Invariante

$$\mathbb{P}^n \supset \mathbb{B}^n : |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < 1,$$

n -dimensionaler komplexer **Einheitsball**

Wirkung der **unitären Gruppe**


$U((n, 1), \mathbb{C}) \subset GL_{n+1}(\mathbb{C})$, **Picardsche Modulgruppe** des imaginär quadratischen Zahlkörpers K : kommensurabel mit der **vollen Picardschen Modulgruppe**

$$\Gamma_K = SU((n, 1), \mathfrak{O}_K) := U((n, 1), \mathbb{C}) \cap Sl_{n+1}(\mathfrak{O}_K),$$

\mathfrak{O}_K Ring der ganzen Zahlen in K .

Effektiv wirkend:

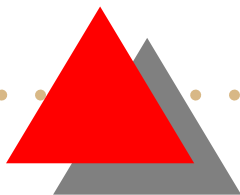
$$\mathbb{P}U((n, 1), \mathfrak{O}_K) = \mathbb{P}\Gamma_K.$$



Picardsche Modulvarietät: $X_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{B}^n$, Γ eine Picardsche Modulgruppe (effektiviert); quasiprojektive Varietät, existiert "kleinste" algebraische Kompaktifizierung, die **Baily-Borel Kompaktifizierung** \hat{X}_Γ , projective normale Varietät;

Orbitale Kategorie $Pic = Pic^n$ (bei fixiertem n).

Orbitale Teilkategorien zu Kongruenzuntergruppen (vollständig):





Kongruenzuntergruppe $\Gamma(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_K$ Ideal,
abgeschlossen unter komplexer Konjugation:

$$0 \rightarrow \Gamma(\mathfrak{a}) \rightarrow \Gamma = \Gamma_K \rightarrow \mathrm{SU}((n, 1), \mathcal{O}_K/\mathfrak{a}) \text{ exact}$$

Natürliche Kongruenzuntergruppen:

$$\mathfrak{a} = m\mathcal{O}_K, m \in \mathbb{N}_+.$$

Pic^{nat}, Objekte: $X_\Gamma(m) := \Gamma(m) \backslash \mathbb{B}$ bzw. $\hat{X}_\Gamma(m)$

Picardsche natürliche Kongruenzvarietäten der
Dimension n .



Gemischte Euler-Produkte

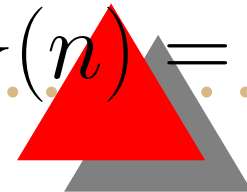
$n = 2$, Picardsche Modulflächen,

$D_K := D_{K/\mathbb{Q}}$ Diskriminante,

$$L(s, \chi_K) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi_K(p)}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_K(n)}{n^s}$$

Dirichletsche L -Reihe von K

mit Dirichlet-Character


$$\chi_K(n) = \left(\frac{D_K}{n}\right) \in \{0, \pm 1\} \text{ (Jacobi symbol)}$$

Produkt-Abschnitte

$$\zeta^{(m]}(s) := \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1};$$

$$L^{[m)}(s, \chi_K) := \prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{\chi_K(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

$$\delta_{K,m} := \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{if } 2 \mid m, D_K, \\ 1, & \text{else;} \end{cases}$$

gemischtes Euler-Produkt: $\zeta^{(m]}(s)^{-1} \cdot L^{[m)}(s, \chi_K),$



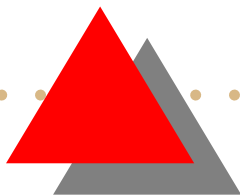
Theorem 2.1 (*Dzambic, H., 2005*):
Die Abbildung (Funktork)

$$X_{\Gamma_K}(m) \mapsto \delta_{K,m} \cdot m^8 \cdot \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \cdot \prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{\chi_K(p)}{p^3}\right)^{-1}$$

ist eine orbitale Invariante

$$Pic^{nat} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

für natürliche Picardsche Kongruenzflächen.





3 Alg.-geom. Erweiterung

Ablösung von Singularitäten:

Ablösung ist eine spezielle Modifikation:
Ersetzen von Flächen-Punkten durch jeweils
eine glatte Kurve, so daß sich die Flächen-
Singularitäten vereinfachen zu ausschließlich
abelschen (zyklischen) Quotienten-
Singularitäten.

Eindeutig für nicht-zyklische Singularitäten.

Flächen, für die eine solche Ablösung existiert,
sowie die abgelösten Singularitäten heißen

ablösbar.



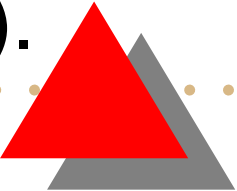


Eigenschaften

1. verträglich mit endlichen (Überlagerungs-) Morphismen von $Pic = Pic^2$.

$$\begin{array}{ccc} X'_{\Gamma_1} & \longrightarrow & \widehat{X}_{\Gamma_1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X'_{\Gamma_2} & \longrightarrow & \widehat{X}_{\Gamma_2} \end{array}, \quad \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2;$$

2. Ablösung ist minimale Singularitäten auf Lösung für Spitzenpunkte reiner Kongruenzflächen (neat).





3.) σ -Prozess für glatte F lächenpunkte;

4.) Auf lösung der Kurvensingularitäten der Verzweigungskurve von $\mathbb{B} \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{B}$.

Ablösungs-Morphismen $X'_\Gamma \rightarrow \hat{X}_\Gamma$,

birational, partielle Singularitäten-Auf lösungen, abgelöste Objekte X'_Γ bilden orbitale Kategorie Pic' .

Zusammen mit: \widehat{Pic} (alle \hat{X}_Γ), $\overset{o}{Pic}$ (alle $X_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{B}$) neue orbitale Kategorie $Pic = Pic^2$.

$EMor(Pic)$: alle durch $\Gamma_1 \supseteq \Gamma_2$ induzierten endlichen Morphismen.





Orbitale Flächen

(Natürlich) **gewichtete F lächen** (Uludag):

$$\mathbf{X} := (X, w), \quad w : X \rightarrow \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\},$$

X algebraische/analytische F läche, w wird **Gewichts-Abbildung** genannt.

Galois Gewichte

Y glatte F läche, Gruppe G wirke eigentlich diskontinuierlich (lokal endlich) auf Y , $X = Y/G$ Quotientenf läche, hat höchstens Quotienten-Singularitäten.

$$w_G : X \longrightarrow \mathbb{N}_+, \quad x = yG \mapsto \#Stab_G(y) < \infty;$$




$X = (X, w_G)$ **Galois-gewichtete orbitale
F läche;**

Beispiel 3.1 $X_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{B}$
offene orbitale Picard-F läche,
 Γ *Picardsche Modulgruppe.*

Galois-endliche Morphismen: $Y \rightarrow X$:

$Y = (Z/H, w_H)$, $X = (Z/G, w_G)$, Z glatte F läche,
 $H \subseteq G \subseteq \text{Aut } Z$, getragen von endlicher Über-
lagerung $Y \rightarrow X$.

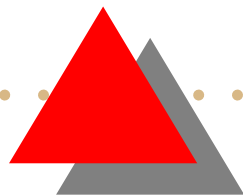


Orbitale Morphismen: getragen von Galois-
endlichen, offenen (analytischen) Einbettungen,
Ablösungen, Kompositionen aus allen.

Beispiel 3.2 *Orbitale Isomorphismen.*

Erweiterung: Zusammenklebungen von orbitalen
Objekten bzw. Morphismen.

endliche orbitale Morphismen: lokal Galois-
endlich.



Beispiel-Diagramm

Orbitale Kategorie Pic : getragen von Objekten aus Pic .

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X}'_{\Gamma_1} & \longrightarrow & \widehat{\mathbf{X}}_{\Gamma_1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{X}'_{\Gamma_2} & \longrightarrow & \widehat{\mathbf{X}}_{\Gamma_2} \end{array}, \quad \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2;$$

horizontal: orbitale Ablösungen,
vertikal: endliche orbitale Morphismen,

Ablösungs-Gewichte

Zur gegebenen Picardschen Modulgruppe Γ_2 existiert reiner (neat) Normalteiler Γ_1 von endlichem Index: X'_{Γ_1} glatt,

$$\begin{array}{ccc} X'_{\Gamma_1} & \longrightarrow & \widehat{X}_{\Gamma_1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X'_{\Gamma_2} & \longrightarrow & \widehat{X}_{\Gamma_2} \end{array}, \quad \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2;$$

oben: "triviale Gewichte" (= 1) auf X_{Γ_1} ,
unten: Galois-Gewichte auf X_{Γ_2} ,
 ∞ für Kompaktifizierungs-Punkte.

Orbitale Picard-Kategorie

Objekte: orbitale Picard-Flächen X'_Γ , \widehat{X}_Γ , X_Γ ,
Morphismen (-Halbgruppe), erzeugt durch

- offene orbitale Einbettungen $X_\Gamma \hookrightarrow \widehat{X}_\Gamma$,
orbitale Ablösungen $X'_\Gamma \rightarrow \widehat{X}_\Gamma$,
- orbital endliche: $X_{\Gamma_1} \rightarrow X_{\Gamma_2}$, $\widehat{X}_{\Gamma_1} \rightarrow \widehat{X}_{\Gamma_2}$,
 $X'_{\Gamma_1} \rightarrow X'_{\Gamma_2}$, $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ von endlichem Index.

Γ , Γ_1 , Γ_2 Picard modular.

Bezeichnung der orbitalen Kategorie: Pic .

Erweiterung der orbitalen gemischten Euler-Produkt-Invar.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Pic}^{nat} & \longrightarrow & \mathbb{R}(gem.Eul - Pr.) \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathbf{Pic} & & \text{algebr.-geom.} \end{array}$$

Explizit, über Ablösungen,
Berechenbarkeit topologischer Invarianten:
Euler-Zahl, Signatur, arithmetisches Geschlecht
Picardscher Modulflächen.

Proportionalitäts-Theorie, äquivariante K-Theorie.

Beispiele orbitaler Picard- Flächen:

1.) $\Gamma = \mathbb{P}\Gamma_K(\sqrt{-3}), K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$

Eisenstein-Zahlen, $\hat{X}_\Gamma = \mathbb{P}^2$ projektive Ebene;
gewichtet (nichttrivial): **Orbitale**

Picard-Eisenstein-Ebene \hat{X}_Γ with **orbitalem**
Picard-Zyklus getragen von 6 Geraden durch 4
Punkte in allgemeiner Lage.

2.) $\Gamma = \mathbb{P}\Gamma_K(1 + i), K = \mathbb{Q}(i)$ Gaußsche Zahlen,

$\hat{X}_\Gamma = \mathbb{P}^2$ projektive Ebene; gewichtet (nicht-

trivial): **Orbitale Picard-Gauß-Ebene** \hat{X}_Γ mit **or-**

bitalem Apollonius-Zyklus getragen von einer

Quadrik und drei Tangenten.



4 Orbitale Picard-Kurven


Explizite Orientierung: Plücker-Formeln für ebene projektive Kurven C mit (höchstens) Kurven-Spitzen oder transversalen Selbstschnitten (Doppelpunkte) als singulären Punkten. Plücker-Relation:

$$d(d - 1) - 2\delta - 3\kappa = d^* = 2d + (2g - 2) - \kappa, \quad (1)$$


g : Kurven-Geschlecht, d : Grad von C , d^* (Anzahl der Tangenten durch einen äußeren allgemeinen Punkt; δ : Anzahl der Doppelpunkte von C ; κ : Anzahl der Kurven-Spitzen.

Vergiß' d^* : Relation zwischen Grad d ,
Geschlecht g , δ und κ .





Γ Picardsche Modulgruppe des Körpers K , $\mathbb{D} \subset \mathbb{B}$
 K -linear eingebettete vollständige Scheibe; $D_\Gamma :=$
 $\Gamma \backslash \mathbb{D} \subset X_\Gamma$ ist eine algebraische Kurve auf der
 Picardschen Modulfläche X_Γ . Sie wird (Flächen-
 eingebettete) **Picard curve** genannt. Modelle:
 $D_\Gamma \subset X_\Gamma$ (open), Kompaktifizierungen: $\hat{D}_\Gamma \subset \hat{X}_\Gamma$,
 $D'_\Gamma \subset X'_\Gamma$. Eine **orbitale Picard curve** ist ein Paar
 $\mathbf{D}_\Gamma := (U, D_\Gamma)$, wobei U eine offene Umgebung
 von D_Γ auf X_Γ . Wir unterscheiden diese Ob-
 jekte nicht, wenn wir zu kleineren Umgebungen
 übergehen.





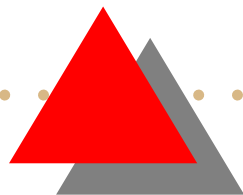
Genauer:

Die orbitalen Picard-Kurven D_Γ , \hat{D}_Γ , D'_Γ sind Keime orbitaler Picard-F"ächen längs der Picard-Kurven. Letztere sind Shimura-Kurven, (übrigens def iniert über $\bar{\mathbb{Q}}$).

Kategorie Pic^1 der orbitale Picard-Kurven:

Objekte wie oben;

(orbitale) Morphismen: induziert durch (orbitale) Morphismen von Pic durch Einschränkung auf Kurven-Umgebungen (alles gewichtet).





Pic^1 bezeichnet die Kategorie der orbitalen Picard-Kurven.

Wir benötigen weitere Ablösungen zur algebraisch-geometrischen Konstruktion orbitaler Invarianten von Pic^1 .

Definition 4.1 Seien $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{B}$, Γ wie oben; Wir nennen Γ **\mathbb{D} -rein**, gdw. Γ rein ist, und für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt: $\gamma(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ oder $\gamma(\mathbb{D}) \cap \mathbb{D} = \emptyset$.

$P \in \mathbb{D}$ ist ein **Γ -kritischer Punkt**, gdw. es ein Element $\gamma \in \Gamma$ gibt, so daß: $\gamma(\mathbb{D}) \neq \mathbb{D}$ und $P \in \gamma(\mathbb{D}) \cap \mathbb{D}$.

z.B. $\Gamma_{\mathbb{D}}$ -Fixpunkt auf \mathbb{D} (elliptischer Punkt).



Die Bildpunkte von Γ -Kritischen Punkten von \mathbb{D} auf der Picardschen Modulkurve D_Γ heißen **kritische Kurvenpunkte**.

Satz 4.2 *Für jede Scheibe $\mathbb{D} \subset \mathbb{B}$ enthält die Picardsche Modulgruppe Γ (alles wie oben) einen \mathbb{D} -reinen Normalteiler Γ_0 von endlichem Index.*

Satz 4.3 *Jede offene Picardkurve D_Γ hat nur endlich viele kritische Punkte.*

Korollar 4.4 *Jede Picardsche Modulkurve $D_\Gamma \subset X_\Gamma$ hat eine endliche Überlagerung $D_{\Gamma_0} \subset X_{\Gamma_0}$ ohne kritische Punkte.*

Kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 D_{\Gamma_0} & \longrightarrow & X_{\Gamma_0} \\
 \downarrow & \text{Galois} & \downarrow \\
 D_{\Gamma} & \longrightarrow & X_{\Gamma}
 \end{array}
 \quad \text{Gewicht 1}
 \quad , \quad
 \begin{array}{ccc}
 D_{\Gamma_0} & \longrightarrow & X_{\Gamma_0} \\
 \downarrow & \text{Galois} & \downarrow \\
 \mathbf{D}_{\Gamma} & \longrightarrow & \mathbf{X}_{\Gamma}
 \end{array}$$

Ablösungen:

$$\begin{array}{ccc}
 D'_{\Gamma_0} & \xrightarrow{\sigma's} & \hat{D}_{\Gamma_0} \\
 \downarrow & \text{Galois} & \downarrow \\
 \mathbf{D}'_{\Gamma} & \longrightarrow & \hat{\mathbf{D}}_{\Gamma}
 \end{array}
 \quad \text{Gewicht 1}$$

σ -Prozeß in jedem Punkt von X_{Γ_0} , der über einem kritischen Punkt auf D_{Γ} liegt. unten: Galois Gewichte (korrekt)



Effekte:

1.) Kompaktifizierung D'_Γ ;

2.) Auf lösung der Kurven-Singularitäten von \hat{D}_Γ ;

3.) Kurven-Singularitäten werden "abgelöst"
durch abelsche Flächen-Singularitäten,
gespeichert auf D'_Γ .

Alle neu-konstruierten orbitalen Objekte, Einbettungen, Überlagerungen, Ablösungen in die Kategorie Pic^1 **orbitaler Picard Kurven** aufnehmen.



Theorem 4.5 *Es existieren zwei algebraisch-geometrisch konstruierte orbitale Invarianten*

$$\text{Self} : \text{Pic}^1 \rightarrow \mathbb{Q},$$

$$\text{Eul} : \text{Pic}^1 \rightarrow \mathbb{Q},$$

*Sie heißen orbitale **Selbstschnitt-** bzw. **orbitale Euler-Invariante.***

Rational modifizierte Selbstschnitte bzw. Eulerzahlen glatter kompakter Flächen-Kurven.

Explizit auf Ablösungen.





5 Relativ-Orbitale Proportionalität:

Theorem 5.1 *Die beiden orbitalen Invarianten sind \mathbb{Q} -linear abhängig. Genauer gilt die folgende Orbitale Proportionalitäts-Relation:*

$$\text{Eul} = 2 \cdot \text{Self}$$

auf Pic^1 .



Weitere orbitale Invarianten:

$$0 \neq h : \mathbf{Pic}^1 \longrightarrow \mathbb{Q}$$

erfüllen, nach Definition, orbitale Gradformel

$$h(\mathbf{D}) = [\mathbf{D} : \mathbf{C}] \cdot h(\mathbf{C})$$

mit orbitalem Grad

$$[\mathbf{D} : \mathbf{C}] := \frac{w(\mathbf{D})}{w(\mathbf{C})} \cdot [C : D]$$

für orbital endliche Morphismen \mathbf{D}/\mathbf{C} .





6 Arithmetisch-orbitale-Divisoren

\mathbb{Q} -Vektorraum $\text{Div}^{\text{ar}} \hat{X}_\Gamma$ der **orbitalen Divisoren**: erzeugt durch alle (arithmetischen) orbitalen Picard-Kurven auf \hat{X}_Γ . Die rationalen Schnittprodukte irreduzibler Kurven auf normalen kompakten Flächen (Mumford, Fulton) werden orbitalisiert und \mathbb{Q} -linear fortgesetzt zu **orbitalen Schnittprodukten**

Definition 6.1 $\langle \cdot \rangle: \text{Div}^{\text{ar}} \hat{X} \times \text{Div}^{\text{ar}} \hat{X} \longrightarrow \mathbb{Q}$
durch

$$\langle \hat{C} \cdot \hat{D} \rangle := \frac{\langle \hat{C} \cdot \hat{D} \rangle}{w(\hat{C})w(\hat{D})}.$$

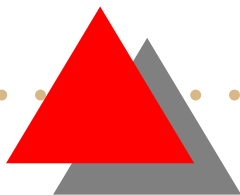



Für endliche orbitale Überlagerungen $f : \hat{Y} \rightarrow \hat{X}$
in Pic^2 hat man auch \mathbb{Q} -lineare orbitale direkte
und inverse Bild- Homomorphismen

$$f_{\#} : \text{Div}^{\text{ar}} \hat{Y} \longrightarrow \text{Div}^{\text{ar}} \hat{X}, \quad f^{\#} : \text{Div}^{\text{ar}} \hat{X} \longrightarrow \text{Div}^{\text{ar}} \hat{Y}$$

Einschränkend auf orbitale endliche Über-
lagerungen orbitaler Picard-Kurven \hat{D}/\hat{C} .
Erstere werden definiert durch

$$f_{\#} \hat{D} := [\hat{D} : \hat{C}] \cdot \hat{C}, \quad (\hat{C} = f(\hat{D})).$$





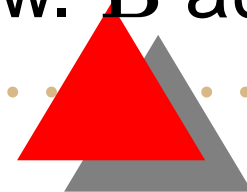
Das orbital inverse Bild von \hat{C} ist nichts anderes als der reduzierte Urbild- Divisor $f^{-1}C$,
komponentenweise versehen mit den Gewichten
auf \hat{Y} . In orbitaler Schreibweise setzen wir

$$f^{\#}\hat{C} := f^{-1}\hat{C}.$$

Projektions-Formel:

$$\langle f_{\#}B \cdot A \rangle = \langle B \cdot f^{\#}A \rangle$$

für alle arithmetischen orbitalen Divisoren A auf
 \hat{Y} bzw. B auf \hat{X} .




Normen

Für $V \in \mathcal{O}_K^3$, $\langle V, V \rangle$ positiv bzgl. der hermiteschen $(2, 1)$ -Metrik, die den Ball $\mathbb{B} = \mathbb{P}(\mathbb{R} \otimes V)^-$ definiert, sei

$$\mathbb{D}_V = \mathbb{P}(V^\perp) \cap \mathbb{B} \text{ (Scheibe)}$$

Definition 6.2 Wir sagen, daß $N \in \mathbb{N}_+$ eine **Norm** von \hat{D}_Γ ist, gdw. $D_\Gamma = \Gamma \setminus \mathbb{D}_V$ und $N = \langle V, V \rangle$. Die **Norm-Menge** (unendlich) von \hat{D}_Γ ist:

$$\mathcal{N}(\hat{D}_\Gamma) := \{N \in \mathbb{N}_+; \text{ex. } V \in \mathcal{O}^3, D_\Gamma = \Gamma \setminus \mathbb{D}_V, \langle V, V \rangle = N\}.$$



Definition 6.3 Für $N \in \mathbb{N}_+$ wird der (reduzierte) *Weil-Divisor*

$$H_N = H_N(\hat{X}_\Gamma) := \sum_{D \in \mathcal{N}(\hat{D}_\Gamma)} \hat{D}_\Gamma$$

N -ter **Heegner-Divisor** auf \hat{X}_Γ genannt. Mit den Gewichten auf \hat{X}_Γ erhalten wir den N -ten **orbitalen Heegner-Divisor** $H_N = H_N(\hat{X}_\Gamma)$ auf \hat{X}_Γ .

Wir führen die **orbitalen Heegner-Funktionale**

$$h_N : \text{Div } \hat{X}_\Gamma \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad \hat{C} \mapsto \langle \hat{C} \cdot H_N \rangle,$$

ein.





Theorem 6.4 *Dual erhalten wir unendlich viele orbitale Invarianten*

$$h_N = \langle \cdot, \mathbf{H}_N \rangle: \mathbf{Pic}^1 \longrightarrow \mathbb{Q},$$

eine für jedes natürliche $N > 0$.

Beweis : über orbitales direktes und inverses Bild, längs endlicher orbitaler Überlagerungen (orbitale Projektionsformel).

Zusätzlich setzt man:

$$h_0 := \mathbf{Eul}.$$



7 Modul-Formen

Frage: Sind die h_N algebraisch oder linear abhängig ?

Für jede orbitale Picard-Kurve \hat{D}_Γ definieren wir im Ring der formalen Potenzreihen $\mathbb{Q}[[q]]$ die **Heegner-Reihe**

$$\text{Heeg}_{\hat{D}_\Gamma} := \sum_{N=0}^{\infty} h_N(\hat{D}_\Gamma) \cdot q^N,$$

Zusammengefaßt erhalten wir:

Theorem 7.1

$$\text{Pic}^1 \longrightarrow \mathbb{Q}[[q]], \quad \hat{D}_\Gamma \mapsto \text{Heeg}_{\hat{D}_\Gamma}$$


... ist eine orbitale Invariante mit Werten im obigen Ring der formalen Potenzreihen.




Wir erinnern an die klassischen
Kongruenz-Untergruppen

$$\Gamma_0(m) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}); c \equiv 0 \pmod{m} \right\}$$

der Modulgruppe $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$, die auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ wirkt. Ebenso an die (Dirichlet) Charaktere $\chi = \chi_K : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, \pm 1\}$ der quadratischen Zahlkörper K . Sie faktorisieren durch die Restklassenringe der Körper-Diskriminanten. Eine holomorphe Funktion $f = f(\tau)$, $\tau \in \mathbb{H}$, wird **Modulform** vom Gewicht $k \in \mathbb{N}$, Niveau $m \in \mathbb{N}$,



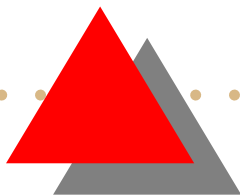



und vom Nebentypus χ genannt, wenn sie folgende Funktional-Gleichungen erfüllt:

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k \chi(d)^k f(\tau) \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(m);$$

(und f setzt sich regulär auf alle Spitzen fort).

Der Raum dieser Modulformen wird mit $\mathcal{M}_k(m, \chi)$ bezeichnet. Es ist ein endlichdimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum.





Beispiel 7.2 . Gewicht $k = 3$, Niveau $m = 4 = |D_{K/\mathbb{Q}}|$, Dirichlet-Charakter $\chi = \chi_K$ des Gaußschen Zahlkörpers $K = \mathbb{Q}(i)$.

$$\mathcal{M}_3(4, \chi) = \mathbb{C}\vartheta^6 + \mathbb{C}\vartheta^2\theta$$

mit

$$\vartheta := \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} = 1 + 2 \sum_{n > 0} q^{n^2}, \quad (\text{Jacobi}),$$

$$\theta := \sum_{0 < u \text{ odd}} \sigma(u) q^u = q \cdot \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{4m})^4 \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^n)^4,$$

(Hecke).






Heegner-Reihe von \hat{C} :


$$\text{Heeg}_{\hat{C}}(\tau) := \sum_{N=0}^{\infty} \mathbf{h}_N(\hat{C}) \cdot q^N, \quad q = \exp(2\pi i\tau),$$


$$\text{Im } \tau > 0$$

Theorem 7.3 *Die Heegner-Reihen sind elliptische Modulformen aus $\mathcal{M}_3(D_{K/\mathbb{Q}}, \chi_K)$.*



Zum Beweis nutzen wir die orbitale Eigenschaft für Heegner-Reihen. Wir finden in jedem Falle eine \mathbb{D} -reine endliche Überlagerung von $\hat{C} = \widehat{\Gamma \backslash \mathbb{D}}$. Auf diesem reinen Niveau erhalten wir eine "Kudla-Cogdell-Reihe", welche bereits als Modulform des genannten Typs bekannt ist. Teilen wir durch den orbitalen Grad, so bleibt diese Qualität für die Ausgangsreihe erhalten.





Korollar 7.4 Für einen festen Körper K ist der \mathbb{Q} -Vektorraum, der durch alle Heegner-Modulformen $\text{Heeg}_{\hat{D}_\Gamma}$, $\hat{D}_\Gamma \leftarrow \hat{X}_\Gamma \in \text{Pic}_K^1$, erzeugt wird, endlich-dimensional.

Beweis : $\mathcal{M}_3(D_{K/\mathbb{Q}}, \chi_K)$ ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum.

Korollar 7.5 Die orbitale Heegner-Reihe $\text{Heeg}_{\hat{D}_\Gamma}(\tau)$ ist eindeutig bestimmt durch $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_3(D_{K/\mathbb{Q}}, \chi_K)$ ihrer (ersten) Fourier-Koeffizienten.



Ablesbar von orbitaler Fläche:

Picard-Apollonius-Beispiel

$$\mathcal{M}_3(4, \chi) \ni \mathbf{Heeg}_{\hat{D}}(\tau)$$

$$= -\frac{1}{8} \cdot \vartheta^6 - \frac{17}{2} \cdot \vartheta^2 \theta,$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} \left(\left(\frac{3N}{2} - \frac{1}{8} \right) a_2(N) + 3 \sum_{m=1}^N \sigma(m) a_2(N - m) \right) q^N.$$

\hat{D} : gewichtete Quadrik des orbitalen Apollonius
Zyklus der the projectiven Ebene;

$\sigma(m)$: Summe der Teiler von m ;

$a_2(k)$: Anzahl der \mathbb{Z} -Lösungen von $x^2 + y^2 = k$.



Orbitale Hilbert-F lächen

Heegner-Reihen (analog konstruiert) liegen in $\mathcal{M}_2(D_{K/\mathbb{Q}}, \chi_K)$.

Für reine Modulgruppen erhält man Hirzebruch-Zagier-Reihen.

Beispiel. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, \hat{C} : gewichtete Kreislinie im orbitalen "Cartesius-Zyklus der projectiven (orbitalen Hilbert-)Ebene:

$$\text{Heeg}_{\hat{C}}(\tau) = -1 + 2 \cdot \sum_{N=1}^{\infty} \left(\sum_{d|N} \chi_K(d) d \right) q^N \in \mathcal{M}_2(8, \chi),$$



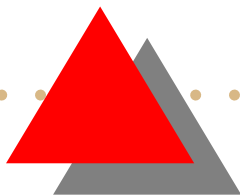
(Eisenstein-Reihe)



Zusammenfassung:

Explizite Konstruktion von Heegner-Reihen:

- 1.) Präzise Klassifikation orbitaler Picard-Flächen \hat{X}_Γ ;
- 2.) Finde eine Basis von $\mathcal{M}_3(D_{K/\mathbb{Q}}, \chi_K)$;
- 3.) Bestimme alle $\hat{D}_1, \dots, \hat{D}_r$ auf \hat{X}_Γ von kleiner Norm;
- 4.) Berechne die ersten Fourier-Koeffizienten von $\text{Heeg}_{\hat{D}}(\tau)$ mit Hilfe von $\text{Self}(\hat{D})$ und orbitalen Schnittzahlen von \hat{D} mit $\hat{D}_1, \dots, \hat{D}_r$.





Geometrische Interpretation:

Abzählung (mit deg-Multiplizität) orbitaler Picard-Kurven fester Norm N auf einer orbitalen Picard-Fläche.

Speziell auf orbitalen Picard-Ebenen gilt

$$\text{Heeg}_{\hat{D}}(\tau) = 2 \cdot \text{Self}(\hat{D}) + \text{deg } \hat{D} \cdot \sum_{N=1}^{\infty} (\text{deg } H_N) q^N$$

mit **ebenen orbitalem Kurven-Grad**

$$\text{deg} = \frac{\mathbb{P}^2\text{-Kurvengrad}}{\text{orbitales Kurvengewicht}}$$

für irreduzible orbitale ebene Kurven (linear fortsetzen).

