Euler-Picardsche Differentialgleichungen
und
Arithmetische Ball-Uniformisierungen

R.-P. Holzapfel,
ehem. Akademie der Wiss., Humboldt-Univ. Berlin

Zusammenfassung.

Was haben partielle Differentialgleichungen der Gestalt

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t} + \frac{1}{t-s}(a\frac{\partial}{\partial t}F - c\frac{\partial}{\partial s}F) = 0, \quad F = F(s,t).$$

mit dem Produkt von L-Reihen-Werten

$$L(\chi_K, -2) \cdot L(\chi_K, -4) \cdot ... \cdot L(\chi_K, -2q)$$

(des Dirichlet-Charakters χ_K) zu tun ? Auf den Zusammenhang stößt man bei der Untersuchung der Verallgemeinerung $y^m = p_n(x)$ hyperelliptischer Kurven. Variiert man (bei festem m,n) die Polynome p_n (n-ten Grades), so erhält man eine algebraische Kurvenfamilie $\mathcal{Y}/S$. Diesem ist ein Picard-Fuchssches System partieller Differentialgleichungen zugeordnet, das eine Variation m-ter Wurzel-Integrale als Lösungen hat. Im günstigen Falle lassen sich diese multivalenten Lösungen durch den n-dimensionalen Ball $\mathbb{B}^n : |z_1|^2+|z_2|^2+...+|z_n|^2 < 1$ uniformisieren. Nun erhebt sich die Frage, welche der zugehörigen Monodromie-Gruppen gleichzeitig arithmetische Gruppen der Theorie der Shimura-Varietäten sind. Um sie herauszufiltern, muß man die Kodaira-Klassifikation algebraischer Mannigfaltigkeiten heranziehen. Dazu ist es nötig, die zahlentheoretische Berechnung von Volumina des Volumens arithmetischer Ball-Gruppen durchzuführen. Auf diese Weise gelangt man zum obigen L-Werte-Produkt. Für die gefundenen Shimura-Flächen liegen interessante Klassifikations-Resultate vor. Auch die zugehörigen Modulformen haben besondere zahlentheoretische Eigenschaften. Darüber hinaus projizieren Modulformen das Tranchieren des Balles in arithmetische Scheiben auf ebene Shimura-Kurven. Diese werden (auch) in der algebraischen Kodierungs-Theorie gebraucht.

Zu den Beweisen wird eine Übersicht gegeben, die sich hauptsächlich auf Ergebnisse der 2. Hälfte des 20. Jahrhunderts namhafter Mathematiker stützt.