Lineare Algebra

E. W. Zink

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 5

Vektorräume

5.1 Definition und Eigenschaften

5.1.1 Definition

Sei K ein fixierter Körper. Ein $K-$Vektorraum ist eine Menge V mit folgenden Eigenschaften:

1. V ist eine additiv geschriebene kommutative Gruppe, d.h. wir ordnen $v_1, v_2 \in V$ ein Element $v_1 + v_2 \in V$ zu, wir haben ein Nullelement o und das Inverse von $v \in V$ ist $-v$. Es gelten das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz.

2. Es gibt eine Operation von K auf V:

$$K \times V \longrightarrow V,$$

$$(\lambda, v) \mapsto \lambda v.$$

und für alle $\lambda_i \in K,\ v, w \in V$ gilt

(a) $\lambda_1(\lambda_2 v) = (\lambda_1\lambda_2)v,$ Assoziativgesetz

(b) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w,$ 1. Distributivgesetz

(c) $(\lambda_1 + \lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v,$ 2. Distributivgesetz

(d) $1_K v = v.$

Die Elemente von V heißen Vektoren , die Elemente von K heißen Skalare, das Nullelement o heißt Nullvektor.

Wenn speziell $K = R$ ist, spricht man von einem reellen, bei $K = C$ von einem komplexen Vektorraum.

Die Theorie der Vektorräume wurde von Herrmann G. Graßmann (1809 - 1877) in seinem Buch „Die lineale Ausdehnungslehre“ (1844, überarbeitet 1862) entwickelt. Graßmann war Gymnasiallehrer in Stettin, er betätigte sich als Mathematiker und Sanskritforscher.

5.1.2 Eigenschaften

Aus den Distributivgesetzen und den Assoziativgesetzen für die Addition in V und K folgt das allgemeine Distributvgesetz (Beweis durch Induktion):

$$(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i)(\sum_{j=1}^{n} v_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i v_j.$$

Weiter gilt $0 \cdot v = o$, denn $v = 1 \cdot v = (1+0) \cdot v = 1v + 0v = v + 0v$.
Es ist $\lambda \cdot o = o$, denn $\lambda \cdot v = (\lambda/v + o) = \lambda v + \lambda 0$.
Die Vorzeichenregel $-v = (-1)v$ folgt aus $0v = o$; daraus folgt weiter
$\lambda(-v) = (-\lambda)v = -(\lambda v)$, denn
$\lambda v + \lambda(-v) = \lambda(v - v) = \lambda o$, also $\lambda(-v) = -(\lambda v)$,
$\lambda v + (-\lambda)v = (\lambda - \lambda)v = 0v = o$, also $(-\lambda)v = -(\lambda v)$.
Weiterhin folgt $(-\lambda)(-v) = \lambda v$.
Wir haben folgende Kürzungsregel: Wenn $\lambda v = o$ ist, so folgt $\lambda = 0$ oder $v = o$, denn wenn $\lambda v = o$ und $\lambda \neq 0$ ist, so ist $v = 1v = (\lambda^{-1}\lambda)v = \lambda^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1}o = o$.

5.1.3 Beispiele, insbesondere die Vektoren im Anschauungsraum

1. $V = K$ ist ein $K-$Vektorraum.

2. Funktionenräume: Sei K ein Körper und I eine Menge; wir betrachten alle Funktionen $f : I \longrightarrow K,\ x \mapsto f(x)$; die Menge aller derartiger Funktionen bezeichnen wir mit $K^I = \{f : I \longrightarrow K\}$. Wir führen hier eine Addition und eine $K-$Operation wie folgt ein: Seien $f, g : I \longrightarrow K$ zwei Funktionen und $\lambda \in K$, wir definieren
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$
und überprüfen z.B. ein Distributivgesetz:
$$[\lambda(f+g)](x) = \lambda(f+g)(x) = \lambda(f(x)+g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x) = (\lambda f + \lambda g)(x),$$
für alle x, also $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$.

3. Die Menge $K[X]$ der Polynome mit Koeffizienten in K ist ein $K-$Vektorraum.

4. Direktes Produkt von Vektorräumen: Seien $V_1, \ldots, V_n$ $K-$Vektorräume; wir betrachten das kartesische Produkt $V_1 \times \ldots \times V_n$ mit den Operationen
$$(v_1, \ldots, v_n) + (w_1, \ldots, w_n) = (v_1 + w_1, \ldots v_n + w_n),$$
$$\lambda(v_1, \ldots, v_n) = (\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n).$$
Die Rechengesetze folgen aus deren Gültigkeit in den V_i.

   Insbesondere ist $\underbrace{K \times \ldots \times K}_{n} =_{Df} K^n$ ein $K-$Vektorraum.

5. Sei K ein Körper, dann ist $V = K^{m\times n}$ versehen mit der Matrixaddition und komponentenweiser $K-$Operation ein $K-$Vektorraum.

6. Das Grundbeispiel – der Ursprung des Vektorbegriffs:

   Ein Blick ins Konversationslexikon lehrt, daß es sich hier um eine ungeeignete Quelle handelt.

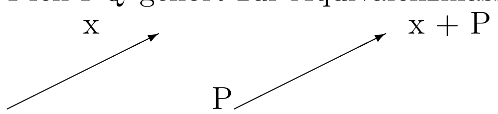
   1898: „Radiusvector: Bewegungslinie für einen sich vom Zentrum wegbewegenden Punkt.“

   1932: „Vektor: Maßangabe für eine physikalische Größe, die eine bestimmte Richtung hat.“

   (a) Sei E der dreidimensionale Anschauungsraum und $P, Q \in E$ Punkte. Wir betrachten Pfeile $\vec{PQ}$ mit Anfangspunkt P und Endpunkt$Q$. Zwei Pfeile $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{P'Q'}$ heißen äquivalent, wenn die Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{P'Q'}$ gleichlang sind und die Geraden durch P, Q und P', Q' parallel sind; wenn man diese Geraden durch Parallelverschiebung zur Deckung bringt, so sollen die Pfeile $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{P'Q'}$ dieselbe Orientierung haben.

   Ein Vektor x ist dann eine Äquivalenzklasse von Pfeilen.

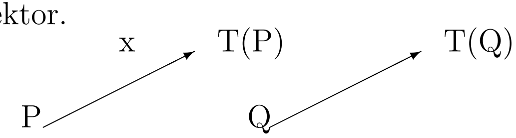
   (b) Ein Vektor induziert eine Abbildung $P \mapsto x + P = Q$ des Raumes E auf sich, dabei ist $x + P = Q$ durch die Eigenschaft $\overrightarrow{PQ}\in x$ definiert, d.h. der Pfeil $\overrightarrow{PQ}$ gehört zur Äquivalenzklasse x.

   In der Äquivalenzklasse x gibt es zu jedem Punkt P genau einen Pfeil mit P als Anfangspunkt, dann ist $x + P$ der Endpunkt dieses Pfeils.

   (c) Die Abbildung $P \mapsto x + P$ heißt die zum Vektor x gehörige Translation T_x, dies ist eine Bijektion von E auf E.

   (d) Umgekehrt: Eine Abbildung $T : E \longrightarrow E$ wird Translation genannt, falls alle Pfeile $\overrightarrow{PT(P)}$ eine Äquivalenzklasse x bilden; x heißt der zu T gehörige Vektor.

   (e) Zwischen den Vektoren und den Translationen gibt es eine natürliche Bijektion:

   $$V(E) = \{Vektoren\} \leftrightarrow T(E) = \{Translationen\}$$

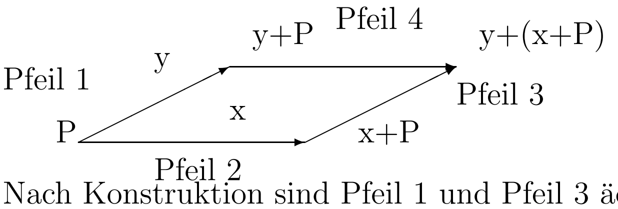
   Wir können nun eine Addition einführen: Seien x, y Vektoren, wir definieren $x + y$ durch die Gleichung

   $$(x + y) + P = x + (y + P) \text{ für alle } P \in E,$$

d.h. $T_{x+y} = T_x \circ T_y$, die Summe der Vektoren entspricht der Hintereinanderausführung der entsprechenden Translationen.

Wir zeigen jetzt: Aus der Parallelogrammregel folgt $T_{x+y} = T_{y+x}$, d.h. die Addition ist kommutativ.

Zu zeigen ist $T_{x+y}(P) = T_{y+x}(P)$ für alle $P \in E$, d.h. $x+(y+P) = y+(x+P)$. Wie betrachten folgende Pfeile:



Nach Konstruktion sind Pfeil 1 und Pfeil 3 äquivalent, sie gehören zu y.

Die Parallelogrammregel besagt: Wenn Pfeil 1 und Pfeil 3 äquivalent sind (also: parallel, gleich lang, gleich gerichtet), dann müssen auch Pfeil 2 und Pfeil 4 äquivalent sein. Wenn also Pfeil 2 zu x gehört, so auch Pfeil 4.

Der Pfeil 5 habe den Anfangspunkt $y + P$ und den Endpunkt $x + (y + P)$, dieser gehört zu x. Da Pfeil 4 und Pfeil 5 denselben Anfangspunkt haben und beide zum Vektor x gehören, müssen sie auch denselben Endpunkt haben, also $y + (x + P) = x + (y + P)$. $\square$

(f) Der Nullvektor o ist nun die KLasse der Pfeile der Form $\overrightarrow{PP}$, die entsprechende Translation ist $T_o = id_E$: $T_o(P)$ ist der Endpunkt des Pfeils mit dem Anfangspunkt P, der zur Klass o gehört, also $T_o(P) = P$.

(g) Multiplikation mit Skalaren: Sei $a \in R$ eine reelle Zahl und v ein Vektor. Wenn $a = 0$ oder $v = o$ ist, setzen wir $av = o$.

Sei also $a \neq 0$ und $v \neq o$ und sei $\overrightarrow{PQ} \in V$ ein Pfeil. Wir betrachten den Zahlenstrahl mit Nullpunkt in P und 1 in Q. Dann sei Q' derjenige Punkt des Strahls, welcher zur Zahl a gehört. Wir setzen fest: av sei die Äquivalenzklasse, welche den Pfeil $\overrightarrow{PQ'}$ enthält.

Damit wird $V(E)$ zu einem $R-$Vektorraum; entsprechend wird $T(E)$ zu einem $R-$Vektorraum (durch $a \cdot T_v = T_{av}$). Die Zuordnung $v \mapsto T_v$ ist dann ein „Isomorphismus" von $R-$Vektorräumen.

5.1.4 Beispiele, der allgemeine Charakter des Vektorraumbegriffs

Neben den Grundbeispielen

- Zeilenvektoren,
- Spaltenvektoren,
- Vektoren im „anschaulichen Sinn"

lassen sich auch

- Funktionen, Polynome und
- Matrizen mit fixierten Format

als Vektoren auffassen.

Wir bemerken, daß die Definition des Vektorraumbegriffs so allgemein wie möglich gehalten ist, um ein Maximum an Anwendungsmöglichkeiten der Theorie zu sichern:

- Der Skalarkörper K kann ein beliebiger Körper (vgl. 4.1) sein, nicht nur R oder C.
- Es bleibt offen, was die Addition von Vektoren und die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren genau sein soll, sondern es werden nur die „Spielregeln“ vorgegeben. In diesem Sinne versucht man auch, die Grundtatsachen der Theorie unabhängig von einem konkreten Beispiel zu entwickeln.

5.1.5 Unterräume

Definition

Sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann heißt U Unterraum von V, falls folgendes gilt:

1. $(U, +)$ ist eine Untergruppe von $(V, +)$.
2. Für jedes $\lambda \in K$ und jedes $u \in U$ ist $\lambda u \in U$.

Aus der ersten Forderung folgt, daß U mindestens das neutrale Element o enthält. Die Teilmenge $\{o\}$ von V ist bereits ein Unterraum ($\lambda o = o$).

Kriterium

Eine (somit nichtleere) Teilmenge $U \subseteq V$ ist ein Unterraum, wenn

1. für alle $u, v \in U$ auch $u + v \in U$ ist und
2. für alle $\lambda \in K$ und $u \in U$ auch $\lambda u \in U$ gilt.

Beweis: Die jeweils zweiten Bedingungen in der Definition und im Kriterium stimmen überein. Es ist nur die Gültigkeit der ersten Bedingung der Definition nachzuweisen.
Da U nicht leer ist, existiert ein $u \in U$. Wir wählen $\lambda = 0$. Dann folgt $0u = o \in U$, also enthält U den Nullvektor. Weiter ist auch $-u = (-1) \cdot u \in U$ für alle $u \in U$, also ist $(U, +)$ eine Untergruppe von $(V, +)$. □

Beispiele für Unterräume

1. Sei $V = R^{1\times 2} = \{(a,b) \mid a,b \in R\}$ der Vektorraum der Zeilenvektoren, sei U die Teilmenge aller Vektoren der Form $(0,b)$, deren erste Koordinate null ist. Dies ist ein Unterraum.

2. Sei $V = V(E)$ der Vektorraum des 3-dimensionalen Anschauungsraums E. Wir betrachten im Raum E irgendeine Ebene $F \subset E$. Sei $V(F)$ die Menge der Vektoren x, die Repräsentanten der Form $\overrightarrow{PQ}$ mit $P, Q \in F$ haben.

   Wir behaupten, daß diese Vektoren gerade den Translationen entsprechen, die die Ebene F in sich überführen.

   Beweis: Sei also x ein Vektor mit einem Repräsentanten $\overrightarrow{PQ} \in F$ und $P' \in F$ ein beliebiger Punkt. Dann gibt es genau einen Pfeil $\overrightarrow{P'Q'}$ mit dem Anfangspunkt P', welcher zu x gehört, und dessen Endpunkt Q' liegt in F. Dies ist offensichtlich, wenn P' auf der Geraden $\overline{PQ}$ liegt, denn die gesamte Gerade gehört zu F. Wenn $P' \notin \overline{PQ}$ ist, dann gehört das Dreieck PQP' zur Ebene F. Wir betrachten den Vektor $y \in V(F)$ mit dem Repräsentanten $\overrightarrow{PP'}$. Dann ist $Q' = x + (y + P) = y + (x + P) = y + Q$ Eckpunkt des vom Dreieck PQP' erzeugten Parallelogramms. Also ist $T_x(P') = Q' \in F$, d.h. T_x führt die Ebene F in sich über.

3. Sei $V = K[X]$ der Raum der Polynome mit Koeffizienten in K und sei eine natürliche Zahl n fixiert. Dann ist die Menge aller Polynome vom Grad $\leq n$ ein Unterraum.

5.1.6 Satz, Durchschnitt von Unterräumen

Sei V ein K-Vektorraum und $\{U_i \mid i \in I\}$ eine Familie von Unterräumen. Dann ist der Durchschnitt $W = \bigcap_{i\in I} U_i$ ebenfalls ein Unterraum von V.

Beweis: Wir verifizieren das Kriterium. Da U_i ein Unterraum ist, gilt $o \in U_i$ für alle U_i. Also gehört o auch zum Durchschnitt W, also ist W nicht leer. Seien weiter $w_1, w_2 \in W$. Wir betrachten deren Summe. Nehmen wir ein beliebiges U_i; weil $w_1, w_2 \in U_i$ gilt und U_i ein Unterraum ist, gilt $w_1 + w_2 \in U_i$ und damit liegt die Summe in W. Genauso sieht man, daß jedes skalare Vielfache eines Elements von W wieder zu W gehört, da es in jedem U_i liegt. □

5.1.7 Folgerung / Definition des Spanns

Sei M eine Teilmenge eines Vektorraums V. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten kleinsten Unterraum $W \subseteq V$, der alle Vektoren aus M enthält. Man nennt W den Spann von M; $W = Spann(M)$.

Beweis: Wir betrachten die Familie $\{U_i\}$ aller Unterräume von V, welche die Menge M enthalten. Dann leistet $W = \bigcap U_i$ das Verlangte.

Beispiel: Sei $x \in V(E)$ und $\overrightarrow{PQ} \in x$ ein Pfeil mit $P \neq Q$, also $x \neq o$. Sei G die Gerade durch P, Q und $V(G)$ die Menge aller Vektoren, welche einen Repräsentanten $\overrightarrow{P'Q'}$ auf

G haben (dies ist die Menge aller Translationen, die G in sich überführen). Dann ist $V(G) = Spann(x)$.

Im Folgenden wollen wir eine direkte Beschreibung von $Spann(M)$ geben. Grundlegend ist der Begriff der Linearkombination.

5.1.8 Definition, Linearkombinationen

Sei $M \subseteq V$ eine Teilmenge von Vektoren. Eine *Linearkombination* von M ist ein Ausdruck der Form

$$u = \sum_{v \in M} \lambda_v v \in V,$$

wobei über skalare Vielfache der Vektoren aus M summiert wird; dabei müssen fast alle (d.h. alle, bis auf endlich viele) Skalare λ_v null sein. Der „Träger" von u, also $\{v \mid \lambda_v \neq 0\}$ ist also eine *endliche* Teilmenge von M. (Wenn M eine endliche Menge ist, gibt es also keine Einschränkung.)
Konvention: Wenn $M = \emptyset$, dann bezeichnet man den Nullvektor o als einzige Linearkombination von M.

5.1.9 Satz Der Spann als Menge von Linearkombinationen

Sei M eine Teilmenge von V. Dann ist die Menge W aller Linearkombinationen von M ein Unterraum von V und es gilt $W = Spann(M)$.
Beweis: Für $M = \emptyset$ ist $W = \{o\}$.
Sei also $M \neq \emptyset$. Der Nullvektor ist immer eine Linearkombination von M, also ist $W \neq \emptyset$. Seien $u = \sum_{v \in S} \lambda_v v$ und $w = \sum_{v \in T} \mu_v v$ zwei Linearkombinationen mit den Trägern S bzw. T; dann ist $S \cup T$ eine endliche Teilmenge von M und

$$u = \sum_{v \in S \cup T} \lambda_v v,$$

und

$$w = \sum_{v \in S \cup T} \mu_v v,$$

also ist auch

$$u + w = \sum_{v \in S \cup T} (\lambda_v + \mu_v) v$$

eine Linearkombination von M.
Wenn $\lambda \in K$ ist, so ist auch

$$\lambda u = \sum_{v \in S} (\lambda \lambda_v) v$$

eine Linearkombination von M.
Somit ist W ein Unterraum, welcher alle v aus M enthält, also $W \supseteq Spann(M)$. Andererseits ist $Spann(M)$ ein Vektorraum, der M enthält, also enthält $Spann(M)$ alle Linearkombinationen aus M, also $W \subseteq Spann(M)$. □

Beispiel: Sei $V = R^{1 \times 3} = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in R\}$ und $M = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, dann ist $Spann(M) = \{(a, b, 0) \mid a, b \in R\}$.

5.1.10 Definition eines Erzeugendensystems

Sei V ein K-Vektorraum und M eine Teilmenge. Man nennt M ein Erzeugendensystem von V, falls $Spann(M) = V$ ist. Man nennt V einen *endlich erzeugten* Vektorraum, falls es eine endliche Menge M mit $V = Spann(M)$ gibt, andernfalls heißt V *nicht endlich erzeugt.*

Beispiele: Der Polynomring $K[X]$ istein Beispiel für einen nicht endlich erzeugten K-Vektorraum. Die Polynome vom Grad $\leq n$ bilden darin eine endlich erzeugten Unterraum mit dem Erzeugendensystem $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$.
Der Raum $R^{1,3}$ ist endlich erzeugt, er besitzt das Erzeugendensystem $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Es gibt viele wichtige Beispiele von nicht endlich erzeugten Vektorräumen. Funktionsräume sind meist nicht endlich erzeugt. In dieser Vorlesung betrachten wir meistens nur endlich erzeugte Vektorräume, man kann sich diese oft geometrisch veranschaulichen.

Zunächst noch eine grundlegende

5.1.11 Definition: Triviale Linearkombination und lineare (Un)Abhängigkeit

Sei M eine Teilmenge von V. Die triviale Linearkombination von M ist der Ausdruck $\sum_{v \in M} \lambda_v v$, wobei alle λ_v gleich 0 sind. Das Ergebnis der trivialen Linearkombination ist offensichtlich der Nullvektor.
Wir nennen die Menge M linear unabhängig, falls es nur eine Linearkombination von M gibt, welche den Nullvektor darstellt, nämlich die triviale Lienarkombination. Andernfalls heißt M linear abhängig.

Beispiel: Die Vektoren $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1) \in R^{1,3}$ sind linear unabhängig.

5.1.12 Satz: Konstruktion von Mengen linear unabhängiger Vektoren

1. *Sei die Menge $M \subset V$ linear unabhängig und sei $w \notin Spann(M)$. Dann ist auch $M \cup \{w\}$ linear unabhängig.*

2. *Umgekehrt: Ist M linear unabhängig und $M \cup \{w\}$ linear abhängig, so folgt $w \in Spann(M)$.*

Beweis: Sei $M' = M \cup \{w\}$. Wir betrachten die Linearkombination

$$\sum_{v \in M'} \lambda_v v = o$$

und nehmen an, daß nicht alle λ_v gleich 0 sind.

Wenn $\lambda_w \neq 0$, so multiplizieren wir $\sum_{v\in M} \lambda_v v = -\lambda_w w$ mit $(-\lambda_w)^{-1}$ und erhalten

$$w = -\sum_{v\in M} \frac{\lambda_v}{\lambda_w} v \in Spann(M),$$

ein Widerspruch. Also muß $\lambda_w = 0$ sein. Daher gilt

$$\sum_{v\in M'} \lambda_v v = \sum_{v\in M} \lambda_v v = o.$$

Da nach Voraussetzung M linear unabhängig ist, ist $\lambda_v = 0$ für alle $v \in M$. Da wir schon sahen, daß $\lambda_w = 0$ ist, ist die betrachtete Linearkombination die triviale, also ist M' linear unabhängig.
Die zweite Aussage folgt aus der ersten, denn wenn $w \notin Spann(M)$ wäre, so wäre $M \cup \{w\}$ linear unabhängig. □

Bemerkungen:

1. Einzelne Vektoren: Der Nullvektor o ist linear abhängig, denn $1 \cdot o = 0$ und $1 \neq 0$. Jeder Vektor $v \neq o$ ist linear unabhängig, denn aus $\lambda v = o$ folgt $\lambda = 0$.

2. Der Satz gibt eine konstruktive Methode, um Mengen linear unabhängiger Vektoren aufzubauen. Wir beginnen mit $v_1 \neq o$, dieser Vektor ist linear unabhängig. Nun wählen wir $v_2 \notin Spann(v_1)$, dann sind v_1, v_2 linear unabhängig. Dann wählen wir $v_3 \notin Spann(v_1, v_2)$, dann sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig, usw. Das Verfahren bricht ab, sobald $Spann(v_1, \ldots, v_n) = V$ ist, dann ist V endlich erzeugt. Ist dagegen V nicht endlich erzeugt, so kommt man nie zum Ende.

3. Der obige Satz wird auch als Abhängigkeitslemma bezeichnet.

Wir haben ein zweites Kriterium für die lineare Unabhängigkeit:

5.1.13 Satz (Eindeutigkeitslemma)

Sei $M \neq \emptyset$ eine Teilmenge von V. Dann ist folgendes äquivalent:

1. *M ist linear unabhängig.*

2. *Jedes $u \in Spann(M)$ läßt sich auf genau eine Art und Weise als Linearkombination von M realisieren.*

Beweis: (2) $\Rightarrow$ (1): Die triviale Linearkombination realisiert den Nullvektor $0 \in Spann(M)$. Nach Voraussetzung gibt es keine andere Linearkombination, die o realisiert, also ist M linear unabhängig.
(1) $\Rightarrow$(2): Sei M linear unabhängig und $u \in Spann(M)$. Wir nehmen an, daß es zwei verschiedene Linearkombinationen von M gibt, die u realisieren:

$$u = \sum_{v\in S} \lambda_v v = \sum_{v\in T} \mu_v v.$$

Dann können wir in beiden Sumen auch über $S \cup T$ summieren. Wir bilden nun die Differenz:

$$\sum_{v \in S \cup T} (\lambda_v - \mu_v) v = o.$$

Da M linear unabhängig ist, müssen für alle v die Zahlen $\lambda_v - \mu_v = 0$ sein, also $\lambda_v = \mu_v$
□

5.1.14 Definition: Basis eines K-Vektorraums

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge B von V heißt Basis, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. B ist linear unabhängig.

2. B erzeugt V, d.h. es gilt $V = Spann(B)$.

Bemerkungen:

1. Wenn B eine Basis von V ist, dann folgt aus dem Eindeutigkeitslemma, daß sich jeder Vektor $u \in V$ auf genau eine Art und Weise als Linearkombination von B schreiben läßt.

2. („Spitzfindigkeiten“) Wir betrachten die leere Menge $M = \emptyset$. Es gibt keine nichttrivialen Linearkombinationen von M, welche den Nullvektor o darstellen (denn eine nichttriviale Linearkombinationen müßte einen Träger haben (vgl 5.1.8)). In diesem Sinne ist die leere Menge linear unabhängig.

   $Spann(\emptyset)$ ist der kleinste Unterraum, welcher $\emptyset$ enthält. In diesem Sinne ist $Spann(\emptyset) = \{o\}$ der Raum, der nur aus dem Nullvektor besteht, denn die leere Menge ist Teilmenge jedes Unterraums. Deshalb wird die leere Menge als Basis des Vektorraums $\{o\}$ betrachtet. Der Nullvektor selbst kann ja keine Basis dieses Raums sein, da er linear abhängig ist ($1 \cdot o = o$ ist eine nichttriviale Linearkombination).

3. Die Vektoren $e_1, e_2, e_3 \in R^{1,3}$ bilden eine Basis dieses Vektorraums.

4. Wir betrachten den anschaulichen Vektorraum. Seien $x, y, z \in V(E)$ und $P \in E$ ein fixierter Punkt; $\overrightarrow{PQ}_1 \in x$, $\overrightarrow{PQ}_2 \in y$, $\overrightarrow{PQ}_3 \in z$ seien Repräsentanten, welche in P beginnen. Dann sind x, y, z genau dann eine Basis, wenn die in P beginnenden Pfeile einen Körper (ein Parallelepiped) aufspannen.

5.1.15 Satz: Existenz von Basen

Sei V ein K-Vektorraum. Seien $M \subseteq M'$ zwei Teilmengen von V mit den Eigenschaften:

1. *M ist linear unabhängig.*

2. *M' erzeugt V.*

Dann gibt es eine Basis B von V mit $M \subseteq B \subseteq M'$.

Beweis: Wir betrachten die Familie F aller Mengen S, welche folgende Eigenschaften haben:

1. S ist linear unabhängig.
2. S liegt zwischen M und M': $M \subseteq S \subseteq M'$.

Wir kennen mindestens eine solche Menge, nämlich $S = M$.

Hilfssatz: *Sei S ein maximales Element der Familie F, dann ist S eine Basis von V.*

Beweis: Weil S maximal ist, muß für alle $x \in M' \setminus S$ die Menge $S \cup \{x\}$ linear abhängig sein. Da S linear unabhängig ist, folgt aus dem Abhängigkeitslemma $x \in Spann(S)$, also $M' \subseteq Spann(S)$. Daraus folgt weiter $V = Spann(M') \subseteq Spann(S)$, also wird V von S erzeugt. Andererseits ist S linear unabhängig, also eine Basis von V. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Um den Hilfssatz anwenden zu können, müssen wir zeigen, daß es in der Familie F maximale Elemente gibt. Wir beschränken uns auf den Fall, daß die Menge M' endlich ist; dann ist V endlich erzeugt.
Wir beginnen mit $S = M$. Wenn $Spann(M) = V$ ist, dann ist M eine Basis.
Wenn $Spann(M) \neq V$ ist, dann kann M' nicht in $Spann(M)$ enthalten sein, weil $Spann(M') = V$ ist. Also exisitiert ein $x_1 \in M'$, $x_1 \notin Spann(M)$. Dann ist $M_1 = M \cup \{x_1\}$ linear unabhängig und $M \subseteq M_1 \subseteq M'$.
Wenn $Spann(M_1) = V$ ist, dann ist M_1 eine Basis von V. Andernfalls findet man wieder ein $x_2 \in M'$, $x_2 \notin Spann(M_1)$, also gehört $M_2 = M_1 \cup \{x_2\}$ zu F.
Weil die Menge M' endlich ist, muß das Verfahren abbrechen, d.h. wir finden eine Basis $B = M_n$. □
Wenn die Menge M' unendlich ist, dann muß das Verfahren nicht abbrechen, d.h. wir finden möglicherweise eine unendliche aufsteigende Folge

$$M \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M'$$

und alle M_i gehören zu F. Dennoch kann man mit dem Zornschen Lemma zeigen, daß die Familie F maximale Elemente haben muß.

5.1.16 Folgerung

1. *Jede linear unabhängige Teilmenge M von V kann zu einer Basis B ergänzt werden.*
2. *Jedes Erzeugendensystem M' von V enthält eine Basis.*
3. *Jeder Vektorraum V besitzt eine Basis.*

Beweis:

1. M ist gegeben, wir wenden den Satz mit $M' = V$ an.
2. M' ist gegeben, wir wenden den Satz mit $M = \emptyset$ an.
3. Wir wenden den Satz mit $M = \emptyset$ und $M' = V$ an. □

5.1.17 Beispiel: Der Zeilenraum einer Matrix

Sei $A \in K^{m\times n}$ eine Matrix vom Format (m, n) mit Einträgen aus dem Körper K.
Als Zeilenraum $ZR(A)$ von A bezeichnen wir den Unterraum von $K^{1\times n}$, der von den Zeilen von A erzeugt wird.

1.
Sei $B \sim A$ eine zeilenäquivalente Matrix; dann gilt $ZR(B) = ZR(A)$.

Beweis: Die Matrix B geht aus A durch eine Folge elementarer Zeilenoperationen hervor, d.h. $B = CA$, wobei $C \in K^{m\times m}$ invertierbar ist. Also ist die i-te Zeile von B das Produkt der i-ten Zeile von C und A:

$$(b_{i1}, \ldots , b_{in}) = (c_{i1}, \ldots , c_{im})A = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} Z_j(A), .$$

wobei die j-te Zeile $Z_j(A)$ mit c_{ij} multipliziert wird. Also liegt die i-te Zeile von B in $ZR(A)$, und das gilt für alle i, d.h. $ZR(B) \subseteq ZR(A)$. Weil C invertierbar ist, gilt $A = C^{-1}B$, also auch $ZR(A) \subseteq ZR(B)$. □

2.
Sei $B \sim A$ und B habe Zeilenstaffelung. Dann sind die von Null verschiedenen Zeilen von B eine Basis des Zeilenraums von A.

Beweis: Die Zeilen von B und die Zeilen von A haben in $K^{1\times n}$ denselben Spann. Wir zeigen, daß die Zeilen von B linear unabhängig sind:

$$B = \begin{pmatrix} b_{1i_1} & \ldots & \ldots & \ldots & b_{1m} \\ & b_{2i_2} & \ldots & & \\ & & b_{3i_3} & \ldots & \\ & & \ldots & & \end{pmatrix}$$

mit $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots$ und $b_{ki_k} \neq 0$.
Wir stellen nun die Null-Zeile als Linearkombination der Zeilen von B dar:

$$\begin{array}{r} \lambda_1\,(\, b_{1i_1} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad b_{1m}\,) \\ +\lambda_2\,(\,\ldots \quad b_{2i_2} \quad \ldots \quad \ldots \quad b_{2m}\,) \\ +\lambda_3\,(\,\ldots \quad \ldots \quad b_{3i_3} \quad \ldots \quad b_{3m}\,) \\ \ldots \qquad\qquad \\ = (\,0 \quad 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 0\,)\,. \end{array}$$

Anhand der 1. Spalte sehen wir $\lambda_1 = 0$, also können wir die erste Zeile weglassen. Dann sehen wir $\lambda_2 = 0$, usw.
Also sind die Zeilenvektoren von B linear unabhängig und erzeugen $ZR(A)$, bilden also eine Basis.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -6 & 4 \\ -1 & -3 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die von Null verschiedenen Zeilen von B bilden eine Basis von $ZR(A)$.

5.2 Endlich erzeugte Vektorräume

In 5.1.9 hatten wir den Begriff des endlich erzeugten Vektorraums V, d.h. $V = Spann(M)$, wobei M eine endliche Teilmenge von V ist. Dann bekommen wir die Existenz einer Basis mit Hilfe von 5.1.15 *ohne* Zornsches Lemma. Wir nehmen dort $M = \emptyset$ und für M' „unser“ M. Also:

5.2.1 Satz: Existenz von Basen für endlich erzeugte Räume

Jeder endlich erzeugte K-Vektorraum V besitzt eine Basis B, welche aus endlich vielen Elementen besteht.

Das Ziel dieses Abschnitts besteht darin zu zeigen, daß eine beliebige Basis B' von V nur endlich viele Elemente enthält, und zwar genauso viele, wie die schon gefundene Basis B.

5.2.2 Schrankenlemma

Der Vektorraum V besitze ein Erzeugendensystem aus n Elementen. Dann müssen $n+1$ Elemente aus V stets linear abhängig sein, d.h. linear unabhängige Teilmengen von V haben höchstens n Elemente.

Beweis: Sei $S = \{v_1, \dots v_n\}$ ein Erzeugendensystem, d.h. $V = Spann(S)$. Seien $w_1, \dots, w_{n+1} \in V$ beliebige $n+1$ Vektoren. Dann existiert eine Matrix $A \in K^{n\times(n+1)}$, so daß

$$(1) \qquad (w_1, \dots, w_{n+1}) = (v_1, \dots, v_n) \cdot A,$$

d.h.

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} v_i a_{ij} \in Spann(s).$$

Hilfssatz F (= Fundamentallemma): *Das System $AX = 0$ mit n Gleichungen und $n+1$ Variablen hat mindestens eine nichttriviale Lösung $B \in K^{(n+1)\times 1}$.* (Der Beweis folgt gleich unter 5.2.3)

Wir multiplizieren (1) von rechts mit B und erhalten

$$(w_1, \dots, w_{n+1})B = 0,$$

weil $AB = 0$ ist. Da B nicht der Nullvektor ist, bedeutet das für $w_1, \dots, w_{n+1}$ eine lineare Abhängigkeit. □

5.2.3 Fundamentallemma

Ein homogenes lineares Gleichungssystem $AX = 0$ mit mehr Variablen als Gleichungen, d.h. $A \in K^{m\times n}$ und $m < n$ hat immer eine nichttriviale Lösung. (K ist ein beliebiger Körper.)

Beweis: Wir betrachten die Matrix $A' \sim A$, die zu A zeilenäquivalent ist und reduzierte Zeilenstufenform besitzt. Dann ist die Zahl der Pivots von A' höchstens gleich der

Zeilenzahl m von A', also kleiner als die Zahl n der Spalten von A', also kleiner als die Zahl der Variablen. Wir wissen aus dem Abschnitt 1.1, daß die Zahl der frei wählbaren Variablen in der Lösung gleich der Differenz der Zahl der Variablen minus der Zahl der Pivots ist, also mindestens gleich $n - m > 0$. (Die Pivotspalten entsprechen den abhängigen Variablen, die restlichen Spalten den frei wählbaren Variablen.) Also ist mindestens eine Variable frei wählbar, d.h. es gibt von $X = 0$ verschiedene Lösungen des Systems $AX = 0$. □

5.2.4 Hauptsatz (Basissatz für endlich erzeugte Vektorräume)

Sei $V \neq \{o\}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum, d.h. es gibt eine endliche Teilmenge $M \subset V$, so daß $V = Spann(M)$ ist. Dann gilt:

1. *V besitzt eine Basis B mit $\#B \leq \#M$.*

2. *Je zwei Basen haben gleich viele Elemente. Diese Anzahl heißt die Dimension von V.*

3. **Ergänzungssatz:** *Jedes System $\{x_1, \ldots, x_r\}$ linear unabhängiger Elemente kann durch endlich viele Vektoren $x_{r+1}, \ldots, x_n$ zu einer Basis B von V ergänzt werden.*

4. **Austauschsatz von Steinitz:** *Ist bereits eine Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ von V gegeben, dann können die benötigten Elemente $x_{r+1}, \ldots, x_n$ innerhalb von B gewählt werden.*

   Andersherum: Man findet in B ein Teilsystem von r Vektoren, so daß die Eigenschaft, Basis zu sein, erhalten bleibt, wenn man diese Vektoren gegen $\{x_1, \ldots, x_r\}$ austauscht.

Beweis: (1) Dies ist Satz 5.2.1.
(2) Seien B_1, B_2 Basen. Da B_2 den Raum V erzeugt, folgt aus dem Schrankenlemma $\#B_1 \leq \#B_2$, da B_1 linear unabhängig ist. Aus denselben Gründen folgt $\#B_2 \leq \#B_1$.
(3, 4) Sei $M = \{x_1, \ldots x_r\}$ eine linear unabhängige Menge in V und sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ irgendeine Basis. Wir betrachten $M' = M \cup B$, dies ist ein Erzeugendensystem. Wir wenden nun 5.1.14 an (wir benötigen nicht das Zornsche Lemma, weil die Mengen M, M' endlich sind) und finden eine Basis B' mit

$$M \subseteq B' \subseteq M'.$$

Nun gilt $\#B' = \#B = n$, also besteht B' genau aus M und $n - r$ Elementen aus B. □

5.2.5 Definition der Dimension eines Vektorraumes

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Dann wird die eindeutig bestimmte Anzahl der Elemente aller Basen von V als *Dimension* des K-Vektorraums bezeichnet, man schreibt $\dim_K(V)$ oder einfach $\dim(V)$. Die Dimension ist gleich der Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren und gleich der Minimalzahl der Elemente eines Erzeugendensystems von V.

5.2.6 Folgerung: Dimension von Unterräumen

Ist V ein K-Vektorraum der Dimension n, dann muß jeder Unterraum $U \subseteq V$ eine Dimension $\leq n$ haben. Wenn U dieselbe Dimension wie V hat, so ist $U = V$. Andersherum: Wenn $U \neq V$ ist, dann hat U eine echt kleinere Dimension als V.

Beweis: Sei B' eine Basis von U, dann sind deren Elemente linear unabhängige Vektoren von V. Also gilt $\#B' \leq \dim(V)$ nach dem Schrankenlemma.
Sei nun $U \neq V$, dann gibt es ein $x \in V$ mit $x \notin U = Spann(B')$. Also ist $B' \cup \{x\}$ auch linear unabhängig, also hat U eine echt kleinere Dimension als V. □

5.2.7 Übersicht über die Basen eines Vektorraums (Basiswechselsatz)

Es sei B eine Basis von V und $A = (\alpha_{ij}) \in K^{n\times n}$ eine Matrix. Wir setzen

$$(b_1, \ldots, b_n) \cdot A := (\sum_i b_i\alpha_{i1}, \sum_i b_i\alpha_{i2}, \ldots) = (b_1', b_2', \ldots b_n').$$

Dann ist folgendes äquivalent:

1. *$A \in GL_n(K)$ ist eine invertierbare Matrix.*
2. *$(b_1', \ldots, b_n')$ ist wieder eine Basis.*

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2) Wenn A invertierbar ist, so existiert eine Matrix $B \in K^{n\times n}$ mit $AB = I_n$. Somit folgt

$$(b_1, \ldots, b_n) = (b_1', \ldots, b_n')B,$$

also können alle b_i als Linearkombinationen der b_i' angesehen werden. Also ist $b_1', \ldots, b_n'$ ein Erzeugendensystem von V, weil ja $b_1, \ldots, b_n \in Spann(b_1', \ldots, b_n')$ gilt. Andererseits ist dieses Erzeugendensystem minimal, weil es genau $n = \dim(V)$ Elemente enthält. Also ist $(b_1', \ldots, b_n')$ eine Basis.
(2) $\Rightarrow$ (1) Umgekehrt sei $b_1', \ldots, b_n')$ auch eine Basis. Dann finden wir eine Matrix $A' \in K^{n\times n}$ mit

$$(b_1, \ldots, b_n) = (b_1', \ldots, b_n')A'.$$

Durch Substitution erhalten wir

$$(b_1, \ldots, b_n) = (b_1, \ldots, b_n)(AA'),$$

jedoch gilt

$$(b_1, \ldots, b_n) = (b_1, \ldots, b_n)I_n.$$

Da $b_1, \ldots, b_n$ linear unabhängig sind, können wir das Eindeutigkeitslemma anwenden, es folgt $AA' = I_n$, also ist die Matrix A invertierbar. □

5.2.8 Konvention bei der Verwendung von Basen

Als Basis eines n-dimensionalen Vektorraums V bezeichnen wir die *geordnete* Menge $B = (b_1, \ldots, b_n)$. Wenn $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ ist, so sagen wir $B = B'$ genau dann, wenn $b_1 = b_1, b_2 = b'_2, \ldots, b_n = b'_n$ ist. Eine geänderte Reihenfolge ergibt eine andere Basis.

Sei X die Menge aller Basen des Vektorraums V. Dann operiert $G = GL_n(K)$ von rechts auf der Menge X:

$$X \times G \longrightarrow X,\ (B, A) \mapsto BA$$

und diese Operation ist einfach transitiv, denn es gibt genau eine Bahn (von einer Basis B ausgehend kommt man durch Anwendung von G zu allen Basen) und wenn $BA = B$ ist, so muß $A = I$ sein (anders gesagt: die Anwendung von $A \neq I$ verändert die Basis). Wenn eine Basis B fixiert wird, dann ist die Zuordnung

$$A \in G \mapsto BA \in X$$

eine Bijektion zwischen G und X.

5.2.9 Folgerung: $GL_n(K)$ über endlichem Körper

Ist K ein endlicher Körper mit q Elementen, dann gilt

$$\#GL_n(K) = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1})$$

und dies ist gleich der Anzahl der Basen eines n-dimensionalen K-Vektorraums.

Beweis:Sei $V = K^{1\times n}$, dies ist ein n-dimensionaler Vektorraum, also $\#GL_n(K) = \#X$ und $\#V = (\#K)^n = q^n$.
Alle von o verschiedenen Vektoren sind linear unabhängig, also gibt es für die Auswahl des ersten Basisvektors b_1 genau $q^n - 1$ Möglichkeiten. Nun hat $Spann(b_1) = Kb_1$ genau q Elemente, das zweite Basiselement b_2 muß in $V - Spann(b_1)$ liegen, dafür gibt es also $q^n - q$ Möglichkeiten. Weiter hat $Spann(b_1, b_2) = Kb_1 + Kb_2$ hat q^2 Elemente, also gibt es $q^n - q^2$ Möglichkeiten für den dritten Basisvektor, usw. Für den letzten Basisvektor bleiben $q^n - q^{n-1}$ Möglichkeiten. □

Als Beipiel betrachten wir den Körper mit 2 Elementen. Hier gibt es 16 2×2-Matrizen, davon sind 6 invertierbar.

Die Summe von Unterräumen

Sei V ein K-Vektorraum und seien U, W zwei Unterräume.

Definition: Mit $U + W := Spann(U \cup W)$ bezeichnen wir die Summe dieser Unterräume; dies ist der kleinste Unterraum von V, der sowohl U als auch W enthält.

Behauptung: $Spann(U \cup W) = \{u + w \mid u \in U,\ w \in W\}$.

Beweis: ($\subseteq$) Mit $u \in U,\ w \in W$ muß $Spann(U, W)$ auch $u + w$ enthalten.
($\supseteq$) Umgekehrt sieht man leicht, daß $\{u + w \mid u \in U,\ w \in W\}$ ein Unterraum von V ist, der U und W enthält, also ist er im kleinsten der diese Unterräume enthaltenden enthalten. □

Mit den Unterräumen $U, W \subseteq V$ erhalten wir also zwei neue Unterräume von V, nämlich $U \cap W$ und $U + W$; der erste ist in beiden enthalten, der zweite enthält beide.

5.2.10 Fakt: Dimension von Durchschnitt und Summe

$$\dim_K(U \cap W) + \dim_K(U + W) = \dim_K(U) + \dim_K(W)$$

Folgerung: Sei $\dim_K(V) = n$. Dann ist $\dim_K(U + W) \leq n$, also folgt aus dem Fakt, daß $\dim_K(U \cap W) \geq \dim_K(U) + \dim_K(W) - n$ ist.
Wenn also U, W Unterräume im n-dimensionalen Raum V sind und $\dim_K(U)+\dim_K(W) > n$ ist, so ist $\dim_K(U \cap W) \geq 1$, d.h. $U \cap W$ kann nicht nur aus dem Nullvektor bestehen.

5.2.11 Beispiel

Sei wieder $V(E)$ der Vektorraum des Anschauungsraums und $P \in E$ ein fixierter Punkt. Die (echten) Unterräume von $V(E)$ entsprechen dann umkehrbar eindeutig einer der folgenden Teilmengen von E:

1. dem Punkt P,
2. den Geraden durch P,
3. den Ebenen durch P.

Denn wenn U ein Unterraum von $V(E)$ ist, so betrachten wir die Menge $U+P$, d.h. wir wenden alle Vektoren aus U auf den Punkt P an und wir erhalten einen der angeführten Fälle.
Umgekehrt betrachten wir P bzw. eine Gerade g durch P bzw. eine Ebene F durch P und bilden

$$U = \{x \in V \mid x + P \in \begin{cases} \{P\} \\ g \\ F \end{cases}$$

Im ersten Fall besteht U nur aus dem Nullvektor, im zweiten Fall ist U ein 1-dimensionaler Unterraum von $V(E)$, im dritten Fall ein zweidimensionaler Unterraum.
Wenn nun U, W Unterräume mit $\dim U + \dim W \leq 3$ sind, also zwei Geraden durch P oder eine Gerade und eine Ebene durch P, dann kann $U \cap W = \{o\}$ sein, d.h. $(U + P) \cap (W + P) = P$. Dies ist der Fall, wenn es sich um zwei verschiedene Geraden durch P oder eine Ebene und eine Gerade durch P, die nicht in der Ebene liegt, handelt.
Wenn jedoch $\dim U + \dim W = 4$ ist, dann sind $U + P$ und $W + P$ zwei Ebenen durch P und deren Durchschnitt hat mindestens die Dimension 1, enthält also (mindestens) eine Gerade.

5.2.12 Weitere Beispiele für Unterräume: Spaltenraum und Nullraum einer Matrix

Sei $A \in K^{m\times n}$ eine $m \times n$-Matrix. Der *Spaltenraum* $SR(A) \subseteq K^{m\times 1}$ von A ist der Spann der Spaltenvektoren $s_1(A), \ldots ; s_n(A) \in K^{m\times 1}$.
Der *Nullraum* $NR(A) \subseteq K^{n\times 1}$ von A ist der Raum aller Vektoren $X \in K^{n\times 1}$ mit $A \cdot X = o$.

5.2.13 Hauptsatz: Verfahren zur Bestimmung einer Basis von $NR(A)$

1. Sei $A' \sim A$ zeilenäquivalent mit reduzierter Zeilenstaffelung; dann ist $NR(A') = NR(A)$, denn die elementaren Zeilenoperationen verändern nicht die Lösungsmenge des zugehörigen linearen Gleichungssystems (in unserem Fall benötigen wir nicht die erweiterte Koeffizientenmatrix, da die rechte Seite von $AX = o$ null ist).

2. Nun bilden wir aus $A' \in K^{m\times n}$ die Matrix $A'' \in K^{n\times n}$ folgendermaßen:

   Die Zeilen von A' werden (ggf. durch Einfügen von Nullzeilen) so auseinandergezogen, daß die Pivots alle auf der Hauptdiagonalen stehen. Das Format der MAtrix wird dann auf $n \times n$ geändert, indem man am Schluß noch Nullzeilen hinzufügt oder wegläßt.

3. Wir betrachten nun die Differenz $M = I_n - A''$; die von Null verschiedenen Spaltenvektoren dieser Matrix haben die Form

$$s_j(M) = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

   dabei steht die 1 in der j-ten Zeile (oder diese Spalte ist null).

   Sei $r \leq n$ die Zahl der Pivots in A' und $I \subset \{1, \ldots, n\}$ die Menge der Spaltennummern, in denen die Pivots von A' stehen, weiter sei J die Komplementärmenge von I. Dann ist $\#J = n - r$ und für $j \in J$ ist $s_j(M)$ kein Nullvektor. **Diese Vektoren bilden eine Basis von $NR(A)$.**

   Also: Wenn $X \in NR(A)$, so ist $X = \sum_{j\in J} s_j(M)x_j$ mit frei wählbaren $x_j \in K$ und die Vektoren $s_j(M)$ sind linear unabhängig. Insbesondere gilt $\dim_K(NR(A)) = \#J = n - r$, dies ist der Freiheitsgrad des zugehörigen Gleichungssystems.

5.2.14 Beispiel

Sei $A \in K^{2\times 4}$ die Matrix mit

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

dann ist

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{4\times 4}$$

und

$$M = I_4 - A'' = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Pivotspalten haben die Nummern 1, 3, also sind die gesuchten Basisvektoren diejenigen aus den Spalten 2 und 4.

Einige Erläuterungen zum Verfahren:

Wir bilden $A \mapsto A' \mapsto A''$.
Die Nullräume von A und A' stimmen überein (klar), die von A' und A'' auch, da wir hier nur Nullzeilen hinzugefügt oder weggelassen haben.

Fakt: Die Matrix A'' hat die Eigenschaft $(A'')^2 = A''$, derartige Matrizen heißen idempotent (oder Projektoren). Rechen Sie es im obigen Beispiel nach! [1]

Aus dem Fakt folgt nun

$$NR(A) = SR(I - A''),$$

denn $I - A''$ ist der Projektor auf $NR(A'')$:
Sei $A''X = o$, dann ist $X = X - A''X = (I - A'')X$; mit den obigen Bezeichnungen ist also

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = s_1(M)x_1 + \dots s_n(M)x_n$$

eine Linearkombination der Spalten von M, d.h

$$X = MX \in SR(M),$$

also

$$NR(A'') \subseteq SR(M).$$

Sei umgekehrt $X \in SR(M)$,, d.h.

$$X = s_1(M)y_1 + \dots + s_n(M)y_n = M \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (I - A'')Y.$$

Wegen der Idempotenz von A'' ist $A''(I - A'')$ die Nullmatrix, also

$$A''X = A''(I - A'')Y = o,$$

also ist $SR(M) \subseteq NR(A'')$, damit folgt die Gleichheit.

Wir bemerken, daß die j-te Spalte von M entweder null ist oder eine 1 in der Zeile j hat. Somit sind diese Spalten linear unabhängig. □

[1] Für Zahlen folgt aus $x^2 = x$, daß $x = 0$ oder $x = 1$ ist, weil man hier kürzen darf. In Matrixprodukten kann man nicht kürzen. Es gibt viele (nichttriviale) idempotente Matrizen.

5.2.15 Folgerung: Matrizen mit trivialem Nullraum

Für eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ ist folgendes äquivalent:

1. *Die Spaltenvektoren $s_1(A), \dots, s_n(A) \in K^{m\times 1}$ sind linear unabhängig.*
2. *$NR(A) = \{o\}$.*
3. *Die Anzahl der Pivots von $A' \sim A$ ist gleich n.*
4. *Es ist $m \geq n$ und es gibt eine invertierbare Matrix $C \in GL_m(K)$, so daß $CA = \begin{pmatrix} I_n \\ R \end{pmatrix}$, wobei $R \in K^{(m-n)\times n}$ eine „Rest"-Matrix ist.*

$(1) \Rightarrow (2)$: Es ist $AX = o$ genau dann, wenn

$$s_1(A)x_1 + \ldots + s_n(A)x_n = o,$$

wegen der linearen Unabhängigkeit der Spalten existiert also nur die triviale Lösung.
$(2) \Rightarrow (3)$ folgt aus $\dim(NR(A)) = n - r$.
$(4) \Rightarrow (3)$: Sei

$$A \sim CA = \begin{pmatrix} I_n \\ R \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix},$$

damit ist die Anzahl der Pivots gleich n.
$(3 \Rightarrow 4)$: Wenn die Zahl der Pivots gleich der Spaltenzahl ist, so steht in jeder Spalte von A' eine 1. Damit ist A' gleich $\begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}$, denn A' hat reduzierte Zeilenstufenform, also existiert ein C mit $CA = A' = \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}$. □

5.3 Lineare Abbildungen

In diesem Abschnitt geben wir den Matrizen eine neue Interpretation. Matrizen sind lineare Abbildungen zwischen „Koordinatenräumen" der Form $K^{m\times 1}$ bzw. $K^{1\times n}$. Sie ergeben sich durch Spezialisierung aus dem allgemeinen Begriff der linearen Abbildung.

5.3.1 Definition:

Eine Abbildung $f : V \longrightarrow W$ zwischen zwei K-Vektorräumen heißt linear, falls
(1) f ist Homomorphismus der additiven Gruppen,, d.h.

$$f(v_1 +_V v_2) = f(v_1) +_W f(v_2),$$

(vgl. 2.8), es folgt $f(-v) = -f(v)$ und $f(o_v) = o_w$),
(2) f ist K-homogen, d.h.

$$f(\lambda \cdot_V v) = \lambda \cdot_W f(v)$$

für alle $\lambda \in K$.

5.3.2 Grundeigenschaften (I):

Sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbidung von K-Vektorräumen.
(1) Für jede Linearkombination $\sum_{v\in M} \lambda_v v$ einer Teilmenge $M \subset V$ gilt

$$f(\sum_{v\in M} \lambda_v) = \sum_{v\in M} \lambda_v f(v),$$

(2) Ist M ein Erzeugendensystem von V, dann ist f durch seine Werte $\{f(v); v \in M\}$ vollständig bestimmt.

Beweis: (1) Sei $\sum_{v\in M} \lambda_v v$ eine Linearkombination von M, diese hat nach Definition einen endlichen Träger, also nur endlich viele Summanden. Induktiv führt man (1) auf 5.3.1(1)/(2) zurück.
(2) M sei ein Erzeugendensystem von V und die Werte $f(v)$ für $v \in M$ seien bekannt. Dann ist $f(w)$ für jeden Vektor $w \in V$ vollständig bestimmt, denn $w \in Span(M)$, also $w = \sum \lambda_v v$, also $f(w) = f(\sum \lambda_v v) = \sum \lambda_v f(v)$. □

Bemerkung: Lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen sind relativ starre Objekte. Sie sind durch wenige Ausgangsdaten schon vollständig bestimmt.

Anschaulich: $f(Kv) = Kf(v)$, d.h. die durch v bestimmte Gerade durch 0 wird auf eine Gerade durch 0 abgebildet.

Beispiel: Wir betrachten $\mathbf{R}$ els 1-dimensionalen $\mathbf{R}$-Vektorraum, als Basis können wir 1 nehmen. Welche linearen Abbildungen von $\mathbf{R}$ in sich gibt es?
Wir haben $f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1)$, d.h. der Graph der Funktion f ist die Gerade duch den Nullpunkt und den Punkt $(1, f(1))$. Die Abbildung f ist durch den Wert $f(1)$ voll bestimmt.

Bezeichnung: $Hom_K(V, W) = \{$ lineare Abbildungen von V nach $W\}$.

5.3.3 Matrizen als Grundbeispiel für lineare Abbildungen

Sei $K^{n\times 1}$ der K-Vektorraum der Spaltenvektoren.
(1) Sei $A \in K^{m\times n}$ eine $m \times n$-Matrix. Dann ist

$$X \in K^{n\times 1} \mapsto A \cdot X \in K^{m\times 1}$$

eine K-lineare Abbildung.
(2) Andererseits: Sei $f : K^{n\times 1} \longrightarrow K^{m\times 1}$ eine beliebige K-lineare Abbildung und sei $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis von $K^{n\times 1}$. Dann sind also $f(e_1), \ldots, f(e_n) \in K^{m\times 1}$. Wir bilden die Matrix $A \in K^{m\times n}$ mit den Spaltenvektoren $s_i(A) = f(e_i)$. Dann gilt $f(X) = AX$ für alle $X \in K^{n\times 1}$.

Beweis: (1) Daß $X \mapsto AX$ eine lineare Abbildung ist, folgt aus den Eigenschaften der Matrixmultiplikation.
(2) Sei A die Matrix mit den Spaltenvektoren $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ und $X \in K^{n\times 1}$. Dann ist

$$A \cdot X = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum a_{ni}x_i \end{pmatrix} = \sum_i x_i \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = \sum x_i s_i(A) = \sum x_i f(e_i) = f(\sum x_i e_i) = f(X).$$

Wir haben die Abbildung f durch die Matrix A realisiert. □

Das Grundbeispiel zeigt, daß die Zuordnung

$$\text{Matrix} \leftrightarrow \text{lineare Abbildung}$$

eine Bijektion

$$K^{m\times n} \leftrightarrow Hom_K(K^{n\times 1}, K^{m\times 1})$$

darstellt.

5.3.4 Grundeigenschaften (II), Bild und Kern als Vektorräume

Sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung, dann gilt
(1) $Bild(f) = \{f(v); v \in V\}$ ist ein Unterraum von W, insbesondere gilt $dim(Bild(f)) \leq dim(W)$.
(2) $Ker(f) = \{v \in V; f(v) = o\}$ ist ein Unterraum von V.
(3) Eine lineare Abbildung ist genau dann injektiv, wenn $Ker(f) = \{o\}$.
(4) Injektivität hat zur Folge, daß linear unabhängige Vektoren auf linear unabhängige abgebildet werden. Surjektivität hat zur Folge, daß ein Erzeugendensystem auf ein Erzeugendensystem abgebildet wird.

Beweis: (1) $Bild(f) \neq \emptyset$, da $o_W = f(o_V) \in Bild(f)$ ist.
Seien $w_1, w_3 \in Bild(f)$, also $w_1 = f(v_1), w_2 = f(v_2)$, dann ist $w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) \in Bild(f)$.
$\lambda w_1 = \lambda f(v_1) = f(\lambda v_1) \in Bild(f)$.
Sei $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V, dann erzeugen $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ den Raum $Bild(f)$, dessen Dimension ist also höchstens gleich n.
(2) $Ker(f) \neq \emptyset$, weil $o_v \in Ker(f)$.
Seien $v_1, v_2 \in Ker(f)$, also $f(v_1) = f(v_2) = o$. Dann ist $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) = o$, also $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in Ker(f)$.
(3) Wenn f injektiv ist, so sind die Fasern der Abbildung einzelne Punkte, also ist $Ker(f) = \{o\}$.
Wenn $f(v) = f(w)$ ist, so ist $o = f(v) - f(w) = f(v - w)$, also $v - w \in Ker(f)$, d.h. $v = w$. □

5.3.5 Beispiel (Interpretation für Matrizen):

Wir betrachten zur Matrix $A \in K^{m\times n}$ die Abbildung $f_A \in Hom(K^{n\times 1}, K^{m\times 1})$ mit $f_A(X) = AX$. Dann ist
(1) $Bild(f_A)$ der Spaltenraum von A.
(2) $Ker(f_A)$ ist der Nullraum von A, d.h. die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $AX = 0$.

Beweis: Sei $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, dann ist $f_A(X) = x_1 s_1(A) + \cdots + s_n(A) \in Span(s_1(A), \ldots, s_n(A))$, also $Bild(f_A) \subseteq Span(s_1(A), \ldots, s_n(A))$. Andererseits ist $Bild(f_A)$ ein Unterraum und die $s_i(A) = f(e_i)$ sind darin enthalten, also gilt Gleichheit.

(2) $f_A(X) = 0$ gdw. $AX = 0$, d.h. X ist Lösungsvektor des homogenen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix A . $\square$

5.3.6 Anschauliche Vorstellungen von linearen Abbildungen

Seien $v, w \in V$ zwei Vektoren, dann ist

$$\lambda v + (1-\lambda)w = w + \lambda(v-w),\ \lambda \in K$$

die Verbindungsgerade zwischen v und w. Wenn $f : V \longrightarrow W$ linear ist, dann ist

$$f(\lambda v + (1-\lambda)w) = f(w) + \lambda(f(v) - f(w))$$

die Verbindungsgerade der Bildvektoren.

Man kann zeigen:
Sei $f : V \longrightarrow W$ irgendeine Abbildung zwischen$K$-Vektorräumen mit folgenden Eigenschaften (wir setzen $dim_K(V) > 1$ und $\#K > 2$ voraus):
(1) f ist injektiv,
$f(o) = o$ und $Bild(f)$ ist ein Unterraum von W,
(3) jede Gerade in V wird unter f auf eine Gerade in W abgebildet.
Dann ist f „fast“ eine lineare Abbildung, d.h.

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2),\ f(\lambda v) = \sigma(\lambda)f(v).$$

Für $K = \mathbf{R}$ gilt immer $\sigma(\lambda) = \lambda$, d.h. f ist tatsächlich linear.

5.4 Lineare Abbildungen im 2-dimensionalen Fall

Wir betrachten die reelle Zahlenebene $\mathbf{R}^{2\times 1}$.

5.4.1 Vorbemerkung:

Einen Vektor, z.B. $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ kann man sich in zweifachen Weise vorstellen:

a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Ortsvektor, d.h. er repräsentiert die Äquivalenzklasse aller Pfeile $\vec{PQ}$ mit $x_Q - x_P = 5, y_Q - y_P = 1$.
Bemerkung: Wenn man einen Koordinatenursprung O festlegt, dann gibt es eine umkehrbar eindeutige Beziehung

$$\text{Vektor } x \longrightarrow \text{Punkt } P,$$

wobei P der Endpunkt des zu x gehörigen Ortsvektors ist, d.h. P ist der Endpunkt des Pfeils aus der Äquivalenzklasse x, welcher in O ansetzt.
Umgekehrt Ordnen wir einem Punkt P die Klasse x der zu $\vec{OP}$ äquivalenten Pfeile zu.

b) Ebenso kann man $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ auch einfach als Punkt von $\mathbf{R}^{2\times 1}$ betrachten. Eine Addition $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat zwei mögliche Interpretationen:
b1) Vektor + Vektor = Vektor,
b2) Punkt + Vektor = Punkt, dies ist das Ergebnis der entsprechenden Translation.
Bei b1) ist dann die Hintereinanderausführung der entsprechenen Translationen gemeint.

5.4.2 Eigenschaften injektiver linearer Abbildungen

Eine lineare Abbildung $f : \mathbf{R}^{2\times 1} \longrightarrow \mathbf{R}^{2\times 1}$ muß folgende Eigenschaften haben:
A) Nullpunkt $\mapsto$ Nullpunkt,
$f(P + Q) = f(P) + f(Q)$,
$f(\lambda P) = \lambda f(P)$.
Wenn f injektiv ist, dann bedeutet das:
B) Geraden $\mapsto$ Geraden,
(mit A):) Geraden durch O $\mapsto$ Geraden durch O,
C) Parallelen $\mapsto$ Parallenen,
D) Proportionalitäten bleiben erhalten.
Aus B) und C) folgt: Parallelogramme gehen in Parallelogramme über.

Beweis von C): Zwei Geraden g_1, g_2 sind genau dann parallel, wenn es einen Vektor x gibt, der die eine in die andere verschiebt. Sei $f(g_i) = \{f(P); P \in g_i\}$, dann sind $f(g_1), f(g_2)$ wieder Geraden und $f(g_1) + f(x) = f(g_2)$.

5.4.3 Geometrische Konstruktion von Bildpunkten

$f : \mathbf{R}^{2\times 1} \longrightarrow \mathbf{R}^{2\times 1}$ hat immer die Form $f = f_A$ mit einer 2×2-Matrix A. Die Grunddaten sind $s_1(A) = f(e_1), s_2(A) = f(e_2)$.
Um das Bild von $P = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = x_P e_1 + y_P e_2$ zu erhalten, muß man die Koordinaten von $P' = f(P)$ bezüglich der Basis $e_1' = f(e_1), e_2' = f(e_2)$ finden: Wegen der Linearität sind das natürlich dieselben Koordinaten wie von P bezüglich $e_1,\ e_2$ dh. und demzufolge

$$\frac{|O[x_P f(e_1)]|}{|Of(e_1)|} = \frac{|O[x_P e_1]|}{|Oe_1|}, \ \frac{|O[y_P f(e_2)]|}{|Of(e_2)|} = \frac{|O[y_P e_2]|}{|Oe_2|}$$

ist. Daher kann man die Anteile von $f(P)$ in Richtung $f(e_1)$ bzw. $f(e_2)$ aus den Anteilen von P in Richtung e_1 bzw. e_2 mit Hilfe des Strahlensatzes konstruieren.

5.4.4 Beispiele linearer Transformationen der Ebene

a) Spiegelung an der y-Achse:

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Drehung um den Winkel θ entgegen dem Uhrzeigersinn:

$$f(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}cos(\theta)\\sin(\theta)\end{pmatrix},\ f(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-sin(\theta)\\cos(\theta)\end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix}cos(\theta) & -sin(\theta)\\sin(\theta) & cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

c) Spiegelung an der Achse mit dem Winkel $\theta/2$):
Der Vektor $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ wird um θ gedreht, das Ergebnis ist $\begin{pmatrix}cos(\theta)\\sin(\theta)\end{pmatrix}$, der Vektor $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ wird um $2(90^o - \theta/2)$ im Uhrzeigersinn gedreht, das Ergebnis ist dasselbe, als ob man e_1 um $90^o - \theta$ dreht, also $\begin{pmatrix}sin(\theta)\\-cos(\theta)\end{pmatrix}$, also $A = \begin{pmatrix}cos(\theta) & sin(\theta)\\sin(\theta) & -cos(\theta)\end{pmatrix}$.
d) Maßstabsverzerrungen: $e_1 \mapsto k_1e_1, e_2 \mapsto k_2e_2$, die alte x-Achse und die neue sind deckungsgleich, dasselbe gilt für die y-Achse, $A = \begin{pmatrix}k_1 & 0\\0 & k_2\end{pmatrix}$. Die Werte k_1, k_2 heißen die Verzerrungsfaktoren, sie können auch negativ sein.
Im Fall $k_1 = k_2 = k$ ist die Verzerrung in x- und y-Richtung dieselbe; jede Gerade durch den Nullpunkt wird in sich überführt und um den Faktor k gestreckt, bei $k < 0$ wird die Orientierung geändert.

e) Scherung längs der x-Achse:
Der Einheitsvektor e_1 geht in sich über, der Vektor e_2 wird längs der x-Achse in $\begin{pmatrix}k\\1\end{pmatrix}$ verschoben: $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\k & 1\end{pmatrix}$.
Die Scherung längs der y-Achse führt zur Matrix $A = \begin{pmatrix}1 & k\\0 & 1\end{pmatrix}$.

f) Spezialfall: Wenn $det(A) = 0$ ist, so ist der Nullraum von A von $\{o\}$ verschieden, die Spaltenvektoren von A sind linear abhängig und $Bild(f_A) = SR(A)$ ist nur eine Gerade (oder ein Punkt).

5.4.5 Der höherdimensionale Fall:

Die Fundamentalmasche F ist hier ein n-dimensionaler Würfel und $F' = f(F)$ ist ein Parallelepiped. Wenn f injektiv ist, so hat F' dieselbe Dimension, sonst ist sie kleiner als n.
Der Raum $\mathbf{R}^{n\times 1}$ ist durch die Translationen von F gepflastert, der Bildraum von f ist durch die Translationen von F' gepflastert.

5.4.6 Hintereinanderausführung linearer Abbildungen

Satz: Die Hintereinanderausführung linearer Abbildungen ist wieder eine lineare Abbildung. Bei der Entsprechung zwischen linearen Abbildungen und Matrizen korrespondiert die Hintereinanderausführung mit dem Matrixprodukt. Genauer:
(1) Seien U, V, WK-Vektorräume und $f : U \longrightarrow V, g : V \longrightarrow W$ linear, dann ist $g \circ f \in Hom(U, W)$ linear.
(2) Spezialfall: $U = K^{n\times 1}, V = K^{m\times 1}, W = K^{l\times 1}$. Zu f gehöre die Matrix $A_f \in K^{m\times n}$, zu g gehöre $A_g \in K^{l\times n}$. Dann gilt $A_{g\circ f} = A_gA_f$.

Beweis: (1)

$$(gf)(v_1 + v_2) = g(f(v_1 + v_2)) = g(f(v_1) + f(v_2)) = g(f(v_1)) + g(f(v_2)),$$

die Homogenität zeigt man analog.
(2) Sei $X \in K^{n\times 1}$, dann ist

$$A_{gf}X = g(f(X) = g(A_f X) = A_g A_f X$$

für alle X, also $A_{gf} = A_g A_f$. □

Bemerkung: Der Satz kann von zwei auf mehrere lineare Abbildungen bzw. Matrizen verallgemeinert werden.

5.4.7 Beispiele:

1. Zuerst eine Rotation um den Winkel θ, dann eine Scherung in x-Richtung mit dem Faktor k:

$$A_{gf} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\theta) + k \cdot sin(\theta) & -sin(\theta) + kcos(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

2. a) Zuerst Scherung um den Faktor 2 in x-Richtung, dann Reflektion an der Achse $y = x$, Anstiegswinkel $\pi/4$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Dieselben Abbildungen in umgekehrter Reihenfolge:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Anwendung der Abbildungen ist nicht vertauschbar!

5.4.8 Realisierung invertierbarer Abbildungen durch Abbildungsfolgen

Die Abbildung $f : \mathbf{R}^{2\times 1} \longrightarrow \mathbf{R}^{2\times 1}$ entstehe durch die Multiplikation mit einer Elementarmatrix.
Zeilenoperation 1: $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$: Maßstabsverzerrung
Zeilenoperation 2: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: Spiegelung an der Achse $y = x$,
Zeilenoperation 3: $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$: Scherungen.

Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn sie Zeilenäquivalent zu I_2 ist, also wenn sie sich als Produkt von Elementarmatrizen darstellen läßt. Dann läßt sich f_A als Hintereinanderausführung von Maßstabsverzerrungen, Spiegelungen und Scherungen realisieren.

5.4.9 Die inverse Abbildung

Wegen $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$ sind die Abbildungen f_A und $f_{A^{-1}}$ zueinander invers, denn z.B.

$$f_A \circ f_{A^{-1}} = f_{AA^{-1}} = f_I = id$$

.

Wir wollen uns noch die inverse Abbildung veranschaulichen:
Die Abbildung f ist durch das Bild F' der Fundamentalmasche F festgelegt, diese wird durch die Spaltenvektoren von A aufgespannt. Um die Umkehrabbildung von f zu beschreiben, müssen wir die Fundamentalmasche F'' finden, die auf F abgebildet wird. Die Vektoren, die F'' aufspannen, sind die Spalten der Matrix A^{-1}.

5.5 Mehr über lineare Abbildungen und Matrizen

5.5.1 Hauptsatz über die Dimension von Kern und Bild:

Sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung endlichdimensionaler K-Vektorräumen. Dann gilt die Dimensionsformel

$$dim(V) = dim(Ker(f)) + dim(Bild(f)).$$

Beweis: Sei $B' = (b'_1, \ldots, b'_r)$ eine Basis von $Ker(f)$ und $C = (c_1, \ldots, c_s)$ eine Basis von $Bild(f)$; wir wählen $c'_i \in V$ mit $f(c'_i) = c_i$.
1. Behauptung: Die Vektoren $b'_1, \ldots, b'_r, c'_1, \ldots, c'_s$ sind linear unabhängig.
Sei also

$$\sum \lambda_i b'_i + \sum \mu_i c'_i = o.$$

Wir wenden die Abbildung f an und erhalten

$$\sum \mu_i f(c'_i) = \sum \mu_i c_i = o,$$

also müssen alle μ_i null sein. Dann ist aber $\sum \lambda_i b'_i = o$, woraus $\lambda_i = 0$ folgt.
2. Behauptung: Die Vektoren b'_i, c'_j erzeugen V.
Sei $v \in V$ beliebig, dann ist $f(v) \in Bild(f)$, also

$$f(v) = \sum \mu_i c_i = \sum \mu_i f(c'_i) = f(\sum \mu_i c'_i).$$

Daraus folgt $f(v - \sum \mu_i c'_i) = o$, also $v - \sum \mu_i c'_i \in Ker(f)$, d.h. $v - \sum \mu_i c'_i = \sum \lambda_j b'_j$. Damit ist

$$v = \sum \mu_i c'_i + \sum \lambda_j b'_j \in Span(b'_i, c'_j).$$

Aus beiden Behauptungen folgt, daß die b'_i, c'_j eine Basis von V bilden, also $dimV = r + s$. $\square$

5.5.2 Anwendung auf Matrizen

Sei $A \in K^{m\times n}$, dann ist $ZR(A) \subset K^{1\times n}, SR(A) \subset K^{m\times 1}$. Wir wissen:
Zeilenrang$(A) = dim ZR(A)$,
Spaltenrang$(A) = dim SR(A)$,
Defekt$(A) = dim NR(A)$.

Satz: Für $A \in K^{m\times n}$ gilt Defekt(A) + Spaltenrang$(A) = n$.

Beweis: Wir betrachten die zu A gehörige lineare Abbildung

$$f_A : K^{n\times 1} \longrightarrow K^{m\times 1}.$$

Dann ist

$$dim(Ker(f_A)) + dim(Bild(f_A)) = n.$$

□

Bemerkung: Wir werden bald sehen, daß Zeilen- und Spaltenrang einer Matrix übereinstimmen, man spricht daher vom „Rang“ der Matrix.

5.5.3 Isomorphismen, isomorphe Vektorräume

Eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ heißt Isomorphismus, wenn die folgenden äquivalenten Eigenschaften erfüllt sind:
(1) Es existiert eine lineare Abbildung $g : W \longrightarrow V$, so daß

$$g \circ f = id_v, \ f \circ g = id_w.$$

(2) Die Abbildung f ist bijektiv.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Sei $w \in W$, dann ist $w = f(g(w))$, also ist f surjektiv. Wenn $f(v_1) = f(v_2)$ gilt, so ist $v_1 = gf(v_1) = gf(v_2) = v_2$, also ist f injektiv.
(2) $\Rightarrow$ (1): Wenn f bijektiv ist, so haben wir zu jedem $w \in W$ einen eindeutig bestimmten Vektor $f^{-1}(w)$. Wir zeigen, daß f^{-1} eine lineare Abildung ist:
Seien $w_1, w_2 \in W, f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2$, dann ist

$$f^{-1}(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = f^{-1}(\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)) = f^{-1}(f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2.$$

□

Wir nennen zwei K-Vektorräume V, W isomorph, wenn ein Isomorphismus $f : V \longrightarrow W$ existiert.

Aus 5.5.1 folgt, daß isomorphe Vektorräume dieselbe Dimension haben. Wichtig ist, daß auch die Umkehrung gilt.

5.5.4 Beispiel: Matrizen als Isomorphismen

Wir ordnen der Matrix $A \in K^{m\times n}$ die lineare Abbildung $f_A \in Hom(K^{n\times 1}, K^{m\times 1})$ zu. Dann ist f_A genau dann ein Isomorphismus, wenn $m = n$ und $det(A) \neq 0$ ist. Die Umkehrabbildung ist durch die inverse Matrix gegeben: $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$.

5.5.5 Bemerkung: transponierte Matrix, Spaltenäquivalenz

1. Seien A, B multiplizierbare Matrizen, dann gilt (vgl. 3.3.5): $(AB)^t = B^t A^t$.
2. Seien s und z elementare Spalten- bzw. Zeilenoprationen, die einander entsprechen, dann ist $s(A)^t = z(A^t)$.
3. Es ist $s(A) = A \cdot s(I_n)$.
4. Die Matrizen A, B sind spaltenäquivalent, wenn B aus A durch elementare Spaltenoperationen hervorgeht, d.h wenn eine invertierbare Matrix D mit $B = AD$ existiert.
5. Die Matrizen A, B sind genau dann spaltenäquivalent, wenn A^t, B^t zeilenäquivalent sind.

5.5.6 Satz: Nullraum, Zeilenraum und Spaltenraum für zeilen- bzw. spaltenäquivalente Matrizen

Seien $A, B \in K^{m \times n}$.
1. Seien $B \sim A$ zeilenäquivalent, genauer $B = CA$ mit einer invertierbaren Matrix C. Dann gilt:
a) $NR(B) = NR(A)$,
b) $ZR(A) = ZR(B)$,
c) $SR(A) \cong SR(A),\ X \mapsto CX$.
2. Seien $B \sim A$ spaltenäquivalent, genauer $B = AD$ mit einer invertierbaren Matrix D. Dann gilt:
a) $SR(B) = SR(A)$,
b) $NR(B) \cong NR(A),\ X \mapsto DX$
c) $ZR(A) \cong ZR(B),\ Y \mapsto YD$.

Ausgewählte Beweise:
1. c) Wegen $B = CA$ gilt für die i-ten Spalten von B und A

$$s_i(B) = Cs_i(A).$$

$SR(A)$ ist der Spann der $s_i(A)$, $SR(B)$ ist der Spann der $s_i(B)$. Wenn also $X \in SR(A)$ ist, so ist $CX \in SR(B)$. Es gibt eine Umkehrabbildung, weil $A = C^{-1}B$ ist.
2. b) Sei $X \in NR(B)$, also $BX = 0$. Wir substituieren $B = AD$, also gilt $ADX = 0$, also ist $DX \in NR(A)$. Wegen $A = BD^{-1}$ gibt es wieder eine Umkehrabbildung. □

5.5.7 Folgerung:

Bei elementaren Zeilen- und Spaltenoperationen bleiben der Defekt, Spaltenrang und Zeilenrang einer Matrix erhalten.

Beweis: Wir gehen von einer Matrix A zu äquivalenten Matrizen CA oder AD über, dann sind die jeweiligen Zeilenräume, Spaltenräume und Nullräume entweder gleich oder isomorph. In jedem Fall bleibt die Dimension erhalten. □

5.5.8 Schwache Äquivalenz von Matrizen

Wir nennen $A, B \in K^{m\times n}$ schwach äquivalent, falls die folgenden gleichwertigen Eigenschaften erfüllt sind:
1. Es existieren invertierbare Matrizen $C \in GL_m(K),\ D \in GL_n(K)$, so daß $B = CAD$ ist.
2. B entsteht aus A durch eine Folge elementarer Zeilen- und Spaltenoperationen.
Dann gilt: Jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ ist schwach äquivalent zu einer Matrix vom Typ

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $p \leq \min(m, n)$. Dabei ist $r = \text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A)$.

Beweis: A ist zeilenäquivalent zu

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * & 0 & \dots & 0 & \\ & & & & 1 & \dots & 0 & \\ & & & & & & 1 & \dots \end{pmatrix}$$

in reduzierter Zeilenstufenform. Bei schwacher Äquivalenz sind auch noch elementare Spaltenoperationen erlaubt, also

$$A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und diese Matrix hat offensichtlich den Zeilen- und Spaltenrang r und wegen 5.5.7 gilt dies auch für A. $\square$

Im folgenden sprechen wir nur noch vom *Rang* einer Matrix.

5.5.9 Ein Rechenverfahren

Gegeben sei eine Menge $M = \{v_1, \dots v_k\}$ von Vektoren aus $K^{n\times 1}$, gesucht werden
a) ein Teilsystem $B = \{v_{j_1}, \dots v_{j_r}\}$ von M, welche eine Basis von $Span(M)$ ist.
b) eine explizite Darstellung der Vektoren aus M als Linearkombinationen von B.

Zu a): Wir bilden die $n \times k$-Matrix A mit den Spaltenvektoren $v_1, \dots, v_k$ und bestimmen eine zu A zeilenäquivalente Matrix B in Zeilenstufenform, die nicht reduziert sein muß. Wenn die Pivots von B in den Spalten $j_1, \dots, j_r$ stehen, dann bilden die Vektoren $v_{j_1}, \dots v_{j_r}$ eine Basis von $Span(M)$ und es ist $r = Rang(A)$.

Zu b): Wir bilden nun die reduzierte Zeilenstufenform A', die j-te Spalte von A' sei

$$s_j(A') = \begin{pmatrix} \lambda_{1j} \\ \vdots \\ \lambda_{rj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$v_j = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{ij} v_{j_i}.$$

Der Beweis beruht auf 5.5.6 1.c.

5.5.10 Satz von der Eindeutigkeit der reduzierten Zeilenstufenform

Sei $K^{m\times n}/\sim$ die Quotientenmenge von $K^{m\times n}$ bezüglich der Zeilenäquivalenz. Dann bilden die Matrizen mit reduzierter Zeilenstufenform einen Schnitt, d.h. in jeder Äquivalenzklasse gibt es genau eine solche Matrix. Das sehen wir wie folgt:
Sei $A \in K^{m\times n}$ gegeben. Dann ist $A' \sim A$, A' in reduzierter Zeilenstufenform, folgendermaßen bestimmt:
Wir betrachten die Matrizen A_j, die aus A durch Abschneiden nach der j-ten Spalte entstehen, und bilden die Flagge

$$V_0 = \{o\} \subseteq V_1 = SR(A_1) \subseteq V_2 = SR(A_2) \subseteq \ldots \subseteq V_n = SR(A).$$

Wir nennen den Index j eine Sprungstelle, wenn $V_{j-1} \subset V_j$ echt enthalten ist. Seien $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$ die Sprungstellen. Dann gilt:
1. die $j_1, \ldots, j_r$ sind genau die Nummern der Pivotsplaten von A',
2. $B = \{s_{j_1}(A), \ldots, s_{j_r}(A)\}$ ist eine Basis von $SR(A)$,
3. Der j-teSpaltenvektor von A' ist gleich dem Koordinatenvektor von $s_j(A)$ bezüglich der Basis B, ergänzt um $m-r$ Nullen am Ende der Spalte:

$$s_j(A) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{ij} s_{j_i}(A).$$

Beweis: Sei $A' = CA$, dann ist die Abbildung $X \in SR(A) \mapsto CX \in SR(A')$ ein Isomorphismus mit der Eigenschaft

$$s_i(A) \mapsto s_i(A') = Cs_i(A).$$

Deshalb wird der Unterraum $SR(A_j)$ nach $SR(A'_j)$ transportiert. Damit haben die Beiden Flaggen für A und A' dieselben Sprungstellen. Der Blick auf A' zeigt, daß die Sprungstellen genau den Pivotspalten entsprechen.
Sei $s_j(A')$ eine Spalte.
Fall a) Dies ist eine Pivotspalte, etwa die i-te, dann ist $s_j(A) = e_i$.
Fall b) keine Pivotspalte, also

$$s_j(A') = \begin{pmatrix} \lambda_{1j} \\ \vdots \\ \lambda_{rj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h.
$$s_j(A') = \sum e_i\lambda_{ij} = \sum s_{j_i}(A')\lambda_{ij}.$$
Wegen der obigen Isomorphie gilt die entsprechende Gleichung für die Spalten von A, d.h. die Koeffizienten λ_{ij} sind durch A eindeutig bestimmt.

5.5.11 Direkte Summen und Projektoren

Definition: Sei V ein Vektorraum und V_1, V_2 Unterräume. Man nennt V die direkte Summe von V_1 und V_2, fall sich jedes $v \in V$ auf genau eine Art und Weise in der Form

$$v = v_1 + v_2,\ v_i \in V_i$$

darstellen läßt, d.h. die Beiden Räume sind linear unabhängig.
Man schreibt dann $V = V_1 \oplus V_2$.
Bemerkung: V ist genau dann direkte Summe von V_1 und V_2, wenn $V = V_1 + V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \{o\}$ ist.

Beweis: Wenn V direkte Summe ist, dann gilt $V = V_1 + V_2$. Sei $v \in V_1 \cap V_2$ und wir nehmen $v \neq o$ an. Dann hätte v zwei verschiedene Darstellungen:

$$v = v + o = o + v.$$

Umgekehrt, wenn $V = V_1 + V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \{o\}$ ist und zwei Darstellungen

$$v = v_1 + v_2 = w_1 + w_2$$

gegeben sind, dann ist
$$v_1 - w_1 = w_2 - v_2 \in V_1 \cap V_2,$$
also $v_1 = w_1, v_2 = w_2$. $\square$

5.5.12 Definition von Projektoren und Satz:

Eine lineare Abbildung $p : V \longrightarrow V$ heißt Projektor, falls folgende äquivalente Eigenschaften erfüllt sind:
1. $p^2 = p$, d.h. $p(p(x)) = p(x)$ für alle $x \in V$,
2. $Bild(I - p) \subseteq Ker(p)$,
3. $Bild(I - p) = Ker(p)$,
4. $V = Ker(p) \oplus Bild(p)$,
und die Einschränkung von p auf den Unterraum $Bild(p)$ ist die Identität.

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2. Sei $x \in Bild(I - p),\ x = (I - p)(y)$. Dann ist

$$p(x) = p((I - p)(y)) = (p - p^2)(y) = p(y) - p^2(y) = o,$$

also ist $x \in Ker(p)$.
2. $\Rightarrow$ 3. Es gilt immer $Ker(p) \subseteq Bild(I - p)$, denn $x = p(x) + (I - p)(x)$, wenn also $p(x) = o$ ist, so ist $x = (I - p)(x) \in Bild(I - p)$.

3. $\Rightarrow$ 2. ist klar.
2. $\Rightarrow$ 1. Es ist $p^2(x) - p(x) = p((I-p)(x))$, wenn also $Bild(I-p) \subseteq Ker(p)$ ist, so ist dies o.
1. $\Rightarrow$ 4. Es ist

$$x = p(x) + (I-p)(x) \in Bild(p) + Bild(I-p) = Bild(p) + Ker(p).$$

Sei nun $x \in Bild(p) \cap Ker(p),\ x = p(y)$, dann ist

$$p(x) = p^2(y) = p(y) = x,$$

andererseits ist $p(x) = o$, also $x = o$.
Also ist die Summe direkt; wegen $p^2 = p$ muß p auf $Bild(p)$ die Identität sein.
4. $\Rightarrow$ 1. Sei $v = x + y$ mit $x \in Ker(p),\ y \in Bild(p)$. Dann ist

$$p(v) = p(x) + p(y) = p(y) = y,$$

weil p auf $Bild(p)$ die Identität ist. Dann ist aber auch $p^2(v) = p(y) = y = p(v)$, also $p^2 = p$. $\square$

5.5.13 Umkehrung, Parallelprojektion von V auf W längs U

Sei $V = U \oplus W$ eine direkte Summenzerlegung, dann gibt es genau einen Projektor p mit

$$Ker(p) = U,\ Bild(p) = W.$$

Die Fasern der Abbildung sind die zu U parallelen affinen Unterräume $v+U$ und es gilt $p(v+U) = (v+U) \cap W$ ist ein einzelner Vektor. Wir nennen p die Parallelprojektion von V auf W längs U.

Beweis: Jedes v ist eindeutig als $v = x + y,\ x \in U,\ y \in W$ darstellbar. Wir definieren $p(v) = y$. Das ist ein Projektor:

$$p(p(v)) = p(y) = y = p(v),$$

da y bereits in W liegt, und es ist $Bild(p) = W,\ Ker(p) = U$.
Umgekehrt: Wenn p ein Projektor mit $Ker(p) = U,\ Bild(p) = W$ ist, dann muß p die oben beschriebene Abbildung sein.
Nun betrachten wir noch $p(v+U)$: Sei $v = x + y$, dann ist $v + U = y + x + U = y + U$, da $x \in U$ ist. Also $p(v+U) = p(y+U) = y$, da $U = Ker(p)$.
Andererseits ist $(v+U) \cap W = (y+U) \cap W = \{y\}$. $\square$
Bezeichnung: Wir nennen p die Parallelprojektion von V auf W längs U.

5.5.14 Bemerkung: Projektoren treten paarweise auf

Projektoren treten immer paarweise auf. Wenn $p : V \longrightarrow V$ ein Projektor ist, so ist $I - p$ ebenfalls ein Projektor:

$$(I-p)^2 = I^2 - 2p + p^2 = I - p.$$

Bei beiden Projektoren vertauschen sich Kern und Bild.

5.5.15 Wiederholung(vgl 5.2.13):

Sei $A \in K^{m\times n}$ und A' die zeilenäquivalente Matrix mit reduzierter Zeilenstaffelung. Sei weiter A'' die quadratische Matrix, die entsteht, indem man die Zeilen von A' so auseinanderzieht, daß die Pivots auf der Hauptdiagonalen stehen. Dann gilt:
A'' ist ein Projektor mit $Ker(A'') = NR(A)$. Demzufolge hat der komplementäre Projektor $I - A''$ die Eigenschaft

$$SR(I - A'') = Bild(I - A'') = Ker(A'') = NR(A),$$

also ist $I - A''$ der Projektor auf den Nullraum von A.

5.5.16 Lineare Gleichungssysteme und Projektoren

A) Sei $A \in K^{m\times n}$. Wir betrachten das homogene Gleichungssystem $AX = 0$ mit dem Lösungsraum $NR(A) = NR(A')$. Sei weiter $\Delta_A = \Delta_{A'}$ die zugehörige Pivotmatrix und Δ_A^t deren transponierte, es ist $K^{n\times 1} = NR(A) \oplus SR(\Delta_A^t)$. Dann gilt:
(1) $A'' = \Delta_A^t A'$ ist der eindeutig bestimmte Projektor mit

$$NR(A'') = NR(A),\ SR(A'') = SR(\Delta_A^t),$$

(2) $I - A''$ ist der eindeutig bestimmte Projektor mit

$$NR(I - A'') = SR(\Delta_A^t),\ SR(I - A'') = NR(A).$$

Also hat $AX = 0$ die allgemeine Lösung $X = (I - A'')Y$ mit beliebigem Y.
(3) Die von Null verschiedenen Spalten der Matrix $I - A''$ bilden eine Basis von $NR(A)$.

Beweis: Man berechnet direkt $A'\Delta_A^t = I_m$, dann ist $(A'')^2 = A''$ ein Projektor mit der Eigenschaft (1): Es ist $NR(A'') = NR(A)$ und $SR(A'') \subseteq SR(\Delta_A^t)$. Wir betrachten die Dimensionen:
$dimSR(\Delta_A^t) =$ Zahl der Pivots $= r$,
$dimNR(A) = n - r$,
$dimSR(A'') = n - dimNR(A'') = n - (n - r) = r$.
Also haben oben beide Seiten dieselbe Dimension, sind also gleich.
Aus (1) folgt (2), weil $I - A''$ der komplementäre Projektor ist. Demzufolge ist $SR(I - A'') = NR(A)$, also $Rang(I - A'') = n - r$. Jedoch hat $I - A''$ genau $n - r$ von Null verschiedene Spalten, nämlich diejenigen, die komplementär zu den Pivotspalten sind.
□

B) Der inhomogene Fall AX =B:
Wir betrachten die erweiterte Koeffizientenmatrix (A, B), sei (A', B') ihre reduzierte Zeilenstufenform. Eine Lösung existiert genau dann, wenn

$$B \in SR(A) \Leftrightarrow Rang(A, B) = Rang(A) \Leftrightarrow Rang(A', B') = Rang(A')$$

genau dann, wenn die letzte Spalte B' keine Pivotspalte ist. Dann haben wir wieder die Pivotmatrix Δ_A und

$$\Delta_A^t(A', B') = (\Delta_A^t A', \Delta_A^t B') =: (A'', B'').$$

Es gilt: B'' ist eine spezielle Lösung von $AX = B$ und $X = B'' + (I - A'')Y$ ist die allgemeine Lösung.

Beweis: Es ist

$$AX = B \Leftrightarrow A'X = B' \Leftrightarrow A''X = B'',$$

(die beiden letzten sind dieselben Gleichungssysteme, es wurden nur Nullzeilen hinzugefügt), es ist also zu zeigen, daß $A''B'' = B''$ gilt. Nun hat aber $A''X = B''$ mindestens eine Lösung X_0, d.h. B'' liegt im Bild des Projektors A''. Dann ist

$$A''B'' = A''(A''X_0) = (A'')^2 X_0 = A''X_0 = B''.$$

$\square$

5.5.17 Lineare Gleichungssysteme und affine Räume

Sei V ein K-Vektorraum. Ein affiner Unterraum ist eine Teilmenge der Form $v + U$, wobei v ein „Stützvektor" und U ein echter Unterraum von V ist. Es gilt dann $v+U = U$ genau dann, wenn $v \in U$ und $v_1 + U = v_2 + U$ genau dann, wenn $v_1 - v_2 \in U$ (vgl. 2.5.4).

Im Spezialfall $V = K^{n\times 1}$ sind die affinen Unterräume genau die Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme in n Variablen, denn diese haben die Form $B'' + SR(I - A'') = B'' + NR(A)$.

Jeder affine Unterraum $v + U \subset K^{n\times 1}$ läßt sich als Lösungsmenge eines geeigneten Gleichungssystems darstellen: Sei $b_1, \ldots, b_s$ eine Basis von U und $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis. Dann kann $b_1, \ldots, b_s$ mit Hilfe geeigneter Elemente $e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}, (r + s = n)$ zu einer Basis von $K^{n\times 1}$ ergänzt werden. Sei A'' der eindeutig bestimmte Projektor mit $NR(A'') = U, SR(A'') = Span(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r})$. DAnn hat $A''X = A''v$ die spezielle Lösung $X = v$ und die allgemeine Lösung $v + U$. $\square$

5.6 Koordinaten

Mit Vektoren kann man nur rechnen, wenn deren Koordinaten gegeben sind, diese beziehen sich stets auf eine fixierte Basis des Vektorraums. Wenn man eine andere Basis wählt, hat der gleiche Vektor andere Koordinaten. Für die Praxis ist es wichtig zu wissen, wie man zwischen verschiedenen Koordinatensystemen wechseln kann.

Als analytische Geometrie bezeichnet man die Methode, durch Einführung von Koordinaten geometrische Probleme rechnerisch anzugehen. Als Begründer gilt Rene Descartes = Renatus Cartesius (1596 - 1650).

5.6.1 Koordinatenvektor zur Basis B

Sei V/K ein n-dimensionaler Vektorraum und $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis. Dann bekommt man eine Koordinatenabbildung

$$x \in V \mapsto [x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^{n \times 1}.$$

Der Zahlenvektor $[x]_B$ ist dabei durch die Eigenschaft

$$x = (b_1, \ldots, b_n) = b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n$$

bestimmt. Wir nennen $[x]_B$ den Koordinatenvektor von x zur Basis B.
Nach dem Eindeutigkeitslemma 5.1.12 läßt sich x eindeutig als Linearkombination von B schreiben.

5.6.2 Bemerkung:

Die Koordinatenabbildung ist eine lineare Abbildung, sogar ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Beweis: Der Vektor $x + y$ hat die Koordinaten $[x + y]_B = [x]_B + [y]_B$ und für $\lambda \in K$ gilt $[\lambda x]_B = \lambda [x]_B$, also ist die Abbildung linear und besitzt offensichtlich eine Umkehrabbildung. □

Jeder n-dimensionale Vektorraum ist isomorph zu seinem Koordinatenraum $K^{n \times 1}$, jedoch ergeben sich für verschiedene Basen verschiedene Isomorphismen.

Im Spezialfall $V = K^{n \times 1}$ mit der Standardbasis $S = (e_1, \ldots, e_n)$ ist jeder Vektor sein eigener Koordinatenvektor.

5.6.3 Verfahren zur Koordinatenbestimmung

Sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis des Koordinatenraums und $x \in K^{n \times 1}$. wir bilden die Matrix $(b_1, \ldots, b_n, x)$ und überführen sie in Zeilenstufenform, wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & y \\ & & 1 & \end{pmatrix},$$

dann ist $y = [x]_B$.

Wir wollen nun einer linearen Abbildung Koordinaten (eine Matrix) zuordnen. Im Spezialfall $f : K^{n \times 1}, \longrightarrow K^{m \times 1}$ entspricht der linearen Abbildung eine Matrix $A \in K^{m \times n}$, so daß $f(X) = AX$ ist. Jede lineare Abbildung hat also automatisch eine Koordinatenmatrix. Durch Zurckführung auf diesen Spezialfall werden wir jeder linearen Abbildung $f : V \longrightarrow W$ eine Koordinatenmatrix zuordnen.

Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V und $C = (c_1, \dots, c_m)$ eine Basis von W. Dann haben wir die Koordinatenabbildungen $b = [\ ]_B,\ c = [\ ]_C$ aus 5.6.1 und wir erhalten das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ b \downarrow & & \downarrow c \\ K^{n\times 1} & \xrightarrow{A} & K^{m\times 1} \end{array}$$

Dabei ergibt sich die Abbildung A als Nacheinanderausfürung der anderen, wir fassen sie als Matrix auf und nennen diese die Koordinatenmatrix von f bezüglich der Basen B, C; wir bezeichnen sie mit

$$A = [f]_{C,B}.$$

Beachten Sie, das die Indizes B, C gegenläufig geschrieben sind.

5.6.4 Satz Koordinatenmatrix einer linearen Abbildung

Sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung und seien B, C Basen von V bzw. W. Dann ist die Koordinatenmatrix $[f]_{C,B}$ eindeutig durch die Eigenschaft

$$[f]_{C,B}[x]_B = [f(x)]_C$$

bestimmt.

Beweis: Wir haben die Matrix $[f]_{C,B} = A$ gerade so definiert, daß dieses Eigenschaft gilt. Wir müssen noch zeigen, daß sie dadurch eindeutig bestimmt ist.
Wir nehmen $x = b_i$, dessen Koordinatenvektor ist e_i. Wir setzen ein: $[f]_{C,B}e_i = [f(b_i)]_C$.

Das bedeutet: Der i-te Spaltenvektor der Matrix $[f]_{C,B}$ ist genau der Koordinatenvektor von $f(b_i)$ bezüglich der Basis C.

5.6.5 Beispiele

Im trivialen Fall $f = f_A : K^{n\times 1} \longrightarrow K^{m\times 1}$ bei der Standardbasis S ist $[f_A]_{S,S} = A$.

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : K^{2\times 1} \longrightarrow K^{2\times 1}, B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}, C = \{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, dann erhalten wir nach einfacher Rechnung $[A]_{C,B} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.

5.6.6 Vektorräume linearer Abbildungen

Wir betrachten die Menge $Hom_K(V, W)$ aller linearen Abbildungen von V in W. Diese Menge ist ein Vektorraum:
Das Vielfache einer Abbildung f ist die Abbildung λf mit $(\lambda f)(v) = \lambda f(v)$, die Summe von f und g ist durch $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ gegeben.

5.6.7 Satz:

Seien B, C fixierte Basen von V, W. Dann ist

$$Hom_K(V,W) \longrightarrow K^{m\times n},\ f \mapsto [f]_{C,B}$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Eine lineare Abbildung ist eindeutig durch ihre Werte auf B bestimmt. Diese Werte dürfen beliebig gewählt werden, deshalb hat man die Umkehrabbildung

$$K^{m\times n} \longrightarrow Hom_K(V,W),\ A \mapsto f,$$

wobei f dadurch bestimmt ist, daß der Wert $f(b_i) \in W$ bezüglich der Basis C den Koordinatenvektor $[f(b_i)]_C = s_i(A)$ haben soll.

Bemerkung: Wenn eine Teilmenge $M = (v_1, \ldots, v_r)$ von V linear abhängig ist, so können die Werte von f auf M nicht beliebig gewählt werden

5.6.8 Hauptsatz: Koordinatenmatrix für die Kombination linearer Abbildungen

Seien $f : U \longrightarrow V,\ g : V \longrightarrow W$ zwei lineare Abbildungen und es seien Basen A, B, C von U, V, W fixiert. Dann gilt für die Koordinatenmatrizen

$$[g]_{C,B}[f]_{B,A} = [gf]_{C,A}.$$

Beweis: Auf beiden Seiten der Gleichung stehen $l \times n$-Matrizen L bzw. R, diese sind genau dann gleich, wenn $Lx = Rx$ für alle $x \in K^{n\times 1}$ gilt. Sei also $x \in K^{n\times 1}$ beliebig, dann ist $x = [u]_A$ für ein $u \in U$. Auf der linken Seite haben wir

$$[g]_{C,B}([f]_{B,A}[u]_A) = [g]_{C,B}[f(u)]_B = [g(f(u))]_C,$$

rechts haben wir

$$[gf]_{C,A}[u]_A = [(gf)(u)]_C$$

und diese Werte sind gleich. □

5.6.9 Basiswechsel

Wir betrachten im Vektorraum V zwei Basen B, C. Wir bilden zur identischen Abbildung $id_V : V \longrightarrow V$ die Koordinatenmatrix $[id_V]_{C,B} = [1]_{C,B}$. Für jeden Vektor $x \in V$ gilt dann

$$[1]_{C,B}[x]_B = [x]_C,$$

d.h. die Matrix $[1]_{C,B}$ rechnet die B-Koordinaten in die C-Koordinaten um. Man nennt $[1]_{C,B}$ die Übergangsmatrix von B zu C, diese ist quadratisch, weil zwei Basen desselben Raums gleichviele Elemente haben. Übergangsmatrizen sind auch invertierbar, denn

$$[1]_{C,B}[1]_{B,C} = [1]_{C,C} = I.$$

Wir geben $[1]_{C,B}$ explizit an: Die i-te Spalte ist gleich $[b_i]_C$.

5.6.10 Beispiel: Berechnung von Übergangsmatrizen durch Inversenbildung

Wir betrachten die Basis $B = \{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\} \in K^{2\times 1}$, S sei die Standardbasis. Wir wollen die Koordinaten von $x = [x]_S$ bezüglich der Basis B ausrechnen. Dazu benötigen wir die Übergangsmatrix $[1]_{B,S}$, deren i-te Spalte ist gleich $[e_i]_B$, diese Koordinaten berechnen wir:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 1/3 & 1/3\\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3\end{pmatrix}.$$

Der rechte Teil ist $[1]_{B,S}$.

Dies ist genau die inverse Matrix zu $[1]_{S,B} = ([b_1]_S, [b_2]_S$.

Sei jetzt $x = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, wir berechnen

$$[x]_B = [1]_{B,S}[x]_S = \begin{pmatrix}1/3 & 1/3\\ 2/3 & -1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/3\\5/3\end{pmatrix}.$$

Allgemein: Sei in $K^{n\times 1}$ eine Basis B gegeben, dann ist die Übergangsmatrix von S zu B die Inverse derjenigen Matrix, welche als Spaltenvektoren die Elemente von B hat.

Mit den Übergangsmatrizen können wir nicht nur Koordinatenvektoren umrechnen, sondern auch Koordinatenmatrizen:

5.6.11 Satz: Verhalten von Koordinatenmatrizen bei Basiswechsel

Sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung und seien B, B' zwei Basen von V und C, C' zwei Basen von W. Dann gilt

$$[f]_{C',B'} = [1_W]_{C',C}[f]_{C,B}[1_V]_{B.B'}.$$

Der Beweis folgt sofort aus dem Hauptsatz, weil $id_W \circ f \circ id_V = f$ ist. □

5.6.12 Koordinatenmatrizen linearer Operatoren

Schließlich betrachten wir noch den Spezialfall $V = W, B = C$. Eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ eines Vektorraums in sich nennt man einen linearen Operator. In 5.4.4 hatten wir Beispiele im 2-dimensionalen Fall betrachtet.

Hier schreiben wir kurz $[f]_B := [f]_{B,B}$.
Das Produkt (die Hintereinanderausführung) zweier linearer Operatoren ist wieder ein linearer Operator und es gilt $[gf]_B = [g]_B[f]_B$.
Die Menge $End_K(V) := Hom_K(V,V)$ ist ein K-Vektorraum und ein Ring, also eine K-Algebra.
Sei $dim(V) = n$, dann ist

$$End_K(V) \longrightarrow K^{n\times n},\ f \mapsto [f]_B$$

ein Isomorphismus von K-Algebren.

Wenn C eine andere Basis von V ist, so gilt

$$[f]_C = [1]_{C,B}[f]_B[1]_{B,C} = P^{-1}[f]_B P,$$

mit $P = [1]_{B,C}$.

5.6.13 Beispiel: Eine diagonalisierbare Matrix

Sei $f : K^{2\times 1} \longrightarrow K^{2\times 1}$ durch $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_1 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$ gegeben und sei $B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$. Dann ist $[f]_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Die Matrix $[f]_B$ erhalten wir als $[1]_{B,S}[f]_S[1]_{S,B}$. Die Matrix $[1]_{S,B}$ hat als Spalten die Vektoren aus B. Deren Inverse ist $[1]_{B,S} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ und damit erhalten wir $[f]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Dies ist eine Diagonalmatrix, d.h. bezüglich der Basis B ist f eine Maßstabänderung.

5.6.14 Ähnlichkeit von Matrizen

Quadratische Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ heißen ähnlich, falls es eine invertierbare Matrix $P \in K^{n\times n}$ gibt, so daß $B = P^{-1}AP$ gilt. Die Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation. Die Koordinatenmatrizen $[f]_B$ eines linearen Operators f ergeben bei der Variation der Basis B eine Äquivalenzklasse ähnlicher Matrizen.

5.6.15 Beispiel: Projektoren

Sei $p : V \longrightarrow V$ ein Projektor. Dann findet man immer eine Basis B von V, so daß $[p]_B = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist, die Anzahl r der Einsen ist der Rang. Bezüglich einer beliebigen Basis C ist also $[p]_C$ ähnlich zu $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Beweis: Es gilt $V = Bild(p) \oplus Ker(p)$. Wir wählen eine Basis B, die sich aus Basen beider Teilräume zusammensetzt. Dann ist $[p]_B = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und mit $P = [1]_{B,C}$ ist $[p]_C = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P$. □

Index