Vorlesung Algebra II
(Wintersemester 2004/05)

Kapitel: 1. Gruppentheorie, 2. Galoistheorie (Fortsetzung), 3. Kategorien und Funktoren, 4. Einführung in die homologische Algebra, 5. Anwendungen der Kohomologie von Gruppen.

Kapitel 1: Gruppentheorie ([AB],[T] ist weiterführend)

1.1 Wiederholungen (in den Übungen)
Gruppe, Durchschnitt von Gruppen, die von X erzeugte Untergruppe, zyklische Gruppen, Homomorphismus (und Homomorphiesatz), homomorphe Bilder von $\mathbb{Z}$, Ordnung eines Elementes, Nebenklassen nach einer Untergruppe und Index, Satz von Lagrange, Produkte von Mengen bzw. von Untergruppen, zyklische Gruppen-Anzahl erzeugender Elemente, Normalteiler, $\leq$ usw., Produkte von Untergruppen, wenn ein Faktor Normalteiler ist, 1. und 2. Isomorphiesatz, Untergruppen einer Faktorgruppe entsprechen Obergruppen des Kerns. Beispiele für Aktionen einer Gruppe auf einer Menge.

1.2 Aktion einer Gruppe auf einer Menge
Definition, zugehörige Äquivalenzrelation, Bahnen, Quotientenmenge, Beispiele, die möglichen Aktionen von$G$ auf X und die Homomorphismen von G nach S_X, Satz von Cayley über Gruppen als Permutationsgruppen, Isotropiegruppen, Beziehung zu den Bahnen, zweifach transitive Aktion und Maximalität der Isotropiegruppen, G-invariante Äquivalenzrelationen und Blocks, Primitivität, Obergruppen einer Isotropiegruppe, Kriterien für Primitivität.
Kommutatoren, Kommutatorgruppe und ihre Eigenschaften, einfache Gruppen, einfache zyklische Gruppen, einfache nichtkommutative Gruppen. Das Kriterium von Iwasawa. ([T])

1.3 Die Sylowschen Sätze
Formulierung der Sylowschen Sätze, Beispiel von Matrizengruppen mit Koeffizienten in einem endlichen Körper. Beweis der Sylowschen Sätze, Bahnen von zu p primer Ordnung, Satz von Cauchy über Elemente der Ordnung p, Verhalten von p-Sylowgruppen bei der Bildung von Faktorgruppen. (Exkurs über endliche Körper).

1.4 Eine Anwendung des Kriteriums von Iwasawa
Die Einfachheit der Gruppen $PSL(n,q)$. Scherungsmatrizen und die Erzeugung der Gruppe SL_n, Scherungsmatrizen sind (bis auf Ausnahmen) Kommutatoren, SL ist Kommutatorgruppe von GL, die Aktion von $SL(V)$ auf dem projektiven Raum $P(V)$. Isotropiegruppen von Geraden und Normalteiler darin. Verifizieren des Kriteriums von Iwasawa. (Für endliche einfache Gruppen vgl. [G].)

1.5 Kompositionsreihen und Hauptreihen
Subnormalreihen und Kompositionsreihen, Normalreihen und Hauptreihen, Existenz von Kompositionsreihen, Äquivalenz von Kompositionsreihen, der Satz von Jordan-Hölder, (die Variante für Hauptreihen wurde nur erwähnt).

1.6 Auflösbare Gruppen
Die abgeleitete Reihe und die Definition der auflösbaren Gruppen, Beispiele, Kriterien für Auflösbarkeit, die Subquotienteneigenschaft, Kompositionsreihen auflösbarer Gruppen. Auflösbare Untergruppen in GL_n. Endliche p-Gruppen und ihr Zentrum, maximale Untergruppen sind Normalteiler und vom Index p.

Kapitel 2: Galoistheorie (Fortsetzung) ([K], [L], [Wi])

2.1 Ganzheit
Ringerweiterungen und ganze Elemente, Beispiele, Konstruktion von Ringerweiterungen mittels normierter Polynome, Charakterisierung ganzer Elemente, endliche Ringerweiterungen (d.h. S ist als R-Modul endlich erzeugt) sind ganz. Umgekehrt ergeben sich aus ganzen Elementen endliche Ringerweiterungen, Transivitität der Endlichkeit, Transivitität der Ganzheit, der ganze Abschluß, Fall einer Körpererweiterung.

2.2 Endlich erzeugte Körpererweiterungen
Definition, endlich erzeugt und algebraisch impliziert ganz, Version von Hilbert's Nullstellensatz: Eine Körpererweiterung, die sich polynomial von endlichem Typ erzeugen läßt, ist algebraisch.

2.3 Algebraische Abschließung eines Körpers
Definition, Existenz algebraisch abgeschlossener Erweiterungskörper. Existenz einer algebraischen Abschließung, Einlagerungen in algebraisch abgeschlossene Körper lassen sich auf algebraische Erweiterung fortsetzen. Eindeutigkeit (bis auf Isomorphie) der algebraischen Abschließung, der Hilbertsche Nullstellensatz für Ideale in Polynomringen, Lösbarkeit von Systemen algebraischer Gleichungen (in den Übungen: idealtheoretische Interpretation des Koordinatenraumes. Serie 5, Aufg. 2).

2.4 Separable Erweiterungen
Separable Polynome und Elemente, separable Erweiterungen, wann ist Inseparabilität möglich ?
Separabilität vererbt sich auf Zwischenkörper, die verschiedenen Nullstellen und die Anzahl der Fortsetzungen eines Körperhomomorphismus, Charakterisierung separabler Erweiterungen durch die Anzahl möglicher Einbettungen in einen algebraischen Abschluß. Transivitität der Separabilität, der separable Abschluß von K in L, vollkommene (= perfekte) Körper und der Frobeniusautomorphismus. Endliche Körper sind vollkommen.

2.5 Galoistheorie für algebraische Erweiterungen
Der Fixkörper einer Automorphismengruppe. Endliche Bahnen und separable Elemente. Algebraische Erweiterungen, welche normal und separabel sind (= Galoiserweiterungen). Über die Zwischenkörper galoisscher Erweiterungen. Ein Problem: Für unendliche Galoiserweiterungen gibt es mehr Untergruppen als Zwischenkörper. Begriff der Filterbasis in einer abstrakten Gruppe G und die zugehörige Topologie. Die Krulltopologie einer Galoisgruppe (ist über die Körpertheorie definiert (!)). Die FB-Eigenschaft. Definition des projektiven Limes in einem Spezialfall. Die Galoisgruppe ist ein projektiver Limes

endlicher Gruppen und daher kompakt und total unzusammenhängend (proendliche Gruppen). Zwischenkörper entsprechen abgeschlossenen Untergruppen. Anwendung der Galoistheorie für endliche Erweiterungen. Vererbung der Krulltopologie auf Untergruppen. Hauptsatz der Galoistheorie für algebraische Galoiserweiterungen.

2.6. Beispiele
Kubische Polynome und Körper, Polynome mit Galoisgruppe D_4, ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, die absolute Galoisgruppe eines endlichen Körpers identifiziert sich mit $(\hat{\mathbb{Z}}, +)$. Einheitswurzelkörper. Das Minimalpolynom (über $\mathbb{Q}$) einer primitiven n-ten Einheitswurzel (= n-tes Kreisteilungspolynom) hat den Grad $\varphi(n)$. Die Einheitswurzelkörper $\mathbb{Q}_n|\mathbb{Q}$ und die Identifizierung der Galoisgruppe $G(\mathbb{Q}_\infty|\mathbb{Q})$ mit der Einheitengruppe des Prüfer-Ringes. Erwähnung des Satzes von Kronecker und Weber. Bemerkungen zum Umkehrproblem der Galoistheorie. Welche Gruppen sind als Galoisgruppen über einem fixierten Körper K (z.B. $K = \mathbb{Q}$) realisierbar ? Hierzu vgl. [S1]

Kapitel 3: Kategorien und Funktoren. ([Mc], [H], [Ke], [L]).

3.1 Begriff der Kategorie und Beispiele

3.2 Funktoren

3.3 Darstellbarkeit von Funktoren und das Yoneda-Lemma

3.4 Tensorprodukte

3.5 Tensorprodukte von Körpern

3.6 Abelsche Kategorien ([L], [Gr])

3.7 Multilineare Algebra ([Ke], Übungen 11.3, 11.4, 12.1 - 12.3)

Kapitel 4: Einführung in die homologische Algebra ([GM], [S2], Ch. VII.)

4.1 Komplexe und die lange exakte Kohomologiesequenz.
1. Ketten- und Kokettenkomplexe auf einer abelschen Kategorie. 2. Homologie und Kohomologie. 3. Die Kategorie $\mathcal{C}^\circ$ der Kokettenkomplexe auf $\mathcal{C}$. 4. Hauptsatz: Die lange exakte Kohomologiesequenz, welche zu einer exakten Sequenz in $\mathcal{C}^\circ$ gehört; Definition der Übergangsmorphismen. 5. Die Kohomologiegruppen als additive Funktoren auf $\mathcal{C}^\circ$ mit Werten in $\mathcal{C}$. 6. Quasiisomorphismen. 7. Homotopie und 8. ihre Eigenschaften. 9. Die Homotopiekategorie.

4.2 Abgeleitete Funktoren, eine Übersicht
1. Exakte, linksexakte, rechtsexakte Funktoren zwischen abelschen Kategorien. 2. Ziel: die Bildung abgeleiteter Funktoren 3. Injektive und projektive Objekte. 4. Injektive Auflösungen und Kategorien mit genügend vielen injektiven Objekten. 5. Morphismen zwischen injektiven Auflösungen. 6. Definition der Ableitungen R^iF eines linksexakten additiven Funktors zwischen abelschen Kategorien. 7. Eigenschaften der abgeleiteten Funktoren. 8. Ein Zusatz. Wichtig ist die Übungsaufgabe 13.2: Berechnung von Delta-Funktoren mit Hilfe azyklischer Auflösungen.

4.3 Kohomologie von Gruppen. ([S2]
1. G-Moduln. 2. Der Gruppenring Λ. 3. G-Moduln sind dasselbe wie Λ-Moduln. 4. Die Kategorie Mod_R hat genügend viele injektive und projektive Objekte, injektive und dividierbare abelsche Gruppen sind dasselbe. 5. Homologie und Kohomologie einer Gruppe G. 6. Die Standardauflösung eines G-Moduls A. 7. Definition der Kohomologie mit Hilfe des homogenen Kokettenkomplexes. 8. Die lange exakte Kohomologiesequenz.
Die Punkte 9-13 sollen die Kohomologiegruppen durch eine Universalitätseigenschaft charakterisieren: 9. Definition von δ-Funktoren. 10. Morphismen zwischen Funktoren und Morphismen zwischen δ-Funktoren. 11. Begriff eines universellen δ-Funktors. 12. Universalitätskriterium, löschbare Funktoren. 13. Die Kohomologie von Gruppen als universeller δ-Funktor; (ko-) induzierte Moduln. 14. Berechnung der Kohomologie mit Hilfe der inhomogenen Koketten. 15. Wechsel der Gruppe. 16. Restriktion, Inflation, Korestriktion. 17. Korestriktion angewendet auf Restriktion und ein Verschwindungssatz. 18. Die Inflations-Restriktions-Sequenz. Bemerkung über die Komposition von zwei linksexakten Funktoren, Hinweis auf Spektralsequenzen.

Kapitel 5: Anwendungen der Kohomologie von Gruppen

5.1 Gruppenerweiterungen [NSW] S. 18 - 21, [AB]

Vorbemerkung: Inhomogene 2-Kozyklen. 1. Problemstellung: Bildung von Gruppenerweiterungen zu gegebenen G und A ($= G$-Modul). 2. Faktorsysteme und 2-Kozyklen. 3. Satz von O. Schreier. 4. Ein Fall, wo die einzig mögliche Gruppenerweiterung gleich dem semidirekten Produkt ist. 5. Der Satz von Schur-Zassenhaus. Das Frattini-Lemma (vgl. Übungsaufgabe 15.4.). 6. Die Existenz von Hall-Untergruppen in auflösbaren Gruppen (Hall-Untergruppen verallgemeinern den Begriff der Sylowgruppen).

5.2. Einfache Algebren und die Brauergruppe. [Ker]
1. Einfache K-Algebren. 2. Beispiele, 3. Struktursatz von Wedderburn für einfache K-Algebren. 4.,5. Rechtsmoduln und minimale Rechtsideale für einfache K-Algebren. 6. Verhalten von Matrizenalgebren bei Tensorierung. 7. Das Zentrum des Tensorproduktes von zwei K-Algebren. 8. Zentrale einfache K-Algebren. 9. Operationen für zentrale einfache K-Algebren. 11. Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation und weitere Eigenschaften. 12. Die Brauergruppe eines Körpers K.13. Die Abbildung $Br(K) \to Br(L)$, wenn $L|K$ eine Körpererweiterung ist. 14. Der Kern ist die Untergruppe der Algebren mit Zerfällungskörper L. 15. Sonderfall: Verhalten von $[A]$ unter der Abbildung 13., falls die Erweiterung $L|K$ in A eingebettet ist. (Hierzu vgl. auch die Übungsaufgabe 16.3.). 16. Algebraisch-abgeschlossene Körper haben triviale Brauergruppe. 17. Hauptsatz: $Br(K)$ als Vereinigung relativer Brauergruppen $Br(L|K)$ und deren kohomologische Beschreibung. 18. Hilfsbetrachtung: Die Kohomologie endlicher zyklischer Gruppen. 19. Anwendung: VereinfachteBeschreibung von $Br(L|K)$, wenn $L|K$ eine endliche Galoiserweiterung mit zyklischer Galoisgruppe ist.
Fortsetzung der VL am 17.02.05 in den Übungen:
20. Die Sätze von Frobenius und Wedderburn über $Br(K)$, falls $K = \mathbb{R}$ bzw. ein endlicher Körper ist. 21. Kohomologische Beschreibung der Abbildung 13. 22. Die Ordnung von $[A] \in Br(K)$ teilt den Index von A. Insbesondere haben

alle Elemente der Brauergruppe endliche Ordnung. Ausblicke: 23. Die Brauergruppe eines lokalen Körpers (vgl. [Ker] Theorem 16.16. auf Seite 52). 24. Die Brauergruppe eines algebraischen Zahlkörpers - der Satz von Brauer, Hasse, Noether.

Literatur

[AB] J.L. Alperin, R. Bell. *Groups and Representations*. Springer-Verlag 1985

[GM] S. Gelfand, Yu. Manin. *Methods of Homological Algebra*. Springer Verlag 1996 (weiterführend)

[G] D. Gorenstein. *Finite Simple Groups, An Indroduction to their Classification*. Plenum Press 1982

[Gr] A. Grothendieck. *Sur quelques point d'algèbre homologique*. Tokohu Math. J. 2^{nd} series vol. 9, N$^{\text{o}}$ 2,3, 1957

[H] H. Harder. *Lectures on Algebraic Geometry*. Manuskript (Abschnitte I, II über Kategorien bzw. homologische Algebra)

[Ke] G.R. Kempf. *Algebraic Structures*. Vieweg 1995

[Ker] I. Kersten. *Brauergruppen von Körpern*. Vieweg 1990

[K] E. Kunz. *Algebra*. Vieweg 1994

[L] S.Lang. *Algebra*

[Mc] S. MacLane. *Homology*. Springer Verlag 1963 (und weitere Auflagen)

[NSW] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg. *Cohomology of number fields*. Springer Verlag 2000 (Chapter I und II)

[S1] J.P. Serre. *Topics in Galois Theory*. Jones and Bartlett publ.1992

[S2] J.P. Serre. *Local Fields*. Springer Verlag 1995 (Ch. VII über Kohomologie von Gruppen)

[T] D.E. Taylor. *The Geometry of the Classical groups*. Heldermann Verlag 1992

[Wi] J.S. Wilson. *Profinite Groups*. Clarendon Press, Oxford 1998

Betrachtung der Kohomologiegruppen von Garben (Übung 14.5) als abgeleitete Funktoren (δ-Funktoren) im Rahmen der Theorie differenzierbarer Mannigfaltigkeiten:

[Wa] F.W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Liegroups*

Über die Rolle von Garben in der Algebraischen Geometrie:

[Sh] I.R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 2 (Chapter V)*. Springer Verlag 1994 (2. Auflage)

[Z] E.-W. Zink. *Algebra I (VL WS 2003/04)*