Helga Baum
Institut für Mathematik, HU Berlin

Musterlösungen zum Übungsblatt 1

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)
Wintersemester 2017/18

Aufgabe 1
Wir betrachten die Aussagen:
A: *Wenn das Wetter schön ist, fährt Max an den See und geht baden.*
B: *Das Wetter ist schön.*
C: *Max fährt an den See.*
D: *Max geht baden.*

a) Drücken Sie A durch B, C, D und geeignete logische Verknüpfungen aus. Stellen Sie eine vollständige Wahrheitstafel für A in Abhängigkeit von den verschiedenen möglichen Wahrheitswerten von B, C, D auf.

b) Drücken Sie die Negation $\neg A$ durch B, C, D und geeignete logische Verknüpfungen aus, wobei das Zeichen $\neg$ nur noch unmittelbar vor B, C oder D auftreten soll, aber nicht mehr vor zusammengesetzten Aussagen. Formulieren Sie die Negation von A auch sprachlich.

Lösung:
Zu a) Wir schreiben die Aussage A etwas um, so dass die einzelnen Teile klarer werden (auch wenn die sprachliche Schönheit etwas leidet):
Wenn das Wetter ist schön, *dann* Max fährt an den See und Max geht baden.
Wir finden also die drei Aussagen B, C, D wieder und sehen ihre Verknüpfungen.
Symbolisch schreibt sich die Aussage A also als

$$B \Rightarrow (C \wedge D).$$

Wir betrachten nun die zugehörige Wahrheitstafel:

B	C	D	$C \wedge D$	$B \Rightarrow (C \wedge D)$
W	W	W	W	W
W	W	F	F	F
W	F	W	F	F
W	F	F	F	F
F	W	W	W	W
F	W	F	F	W
F	F	W	F	W
F	F	F	F	W

Zu b)

1. Lösung: Wir überlegen uns, unter welchen Bedingungen an B, C, D die Aussage $\neg A$ wahr ist:

$$\begin{aligned}
\neg A \text{ ist wahr} \quad & \text{gdw} \quad \neg(B \Rightarrow (C \wedge D)) \text{ ist wahr} \\
& \text{gdw} \quad B \Rightarrow (C \wedge D) \text{ ist falsch} \\
& \text{gdw} \quad B \text{ ist wahr und } (C \wedge D) \text{ ist falsch} \\
& \text{gdw} \quad B \text{ ist wahr und } C \text{ oder } D \text{ ist falsch} \\
& \text{gdw} \quad B \text{ ist wahr und } \neg C \text{ oder } \neg D \text{ ist wahr} \\
& \text{gdw} \quad B \wedge ((\neg C) \vee (\neg D)) \text{ ist wahr.}
\end{aligned}$$

Nach Definition der Äquivalenz von Aussagen gilt also

$$(\neg A) \iff (B \wedge ((\neg C) \vee (\neg D))).$$

(“gdw“ ist die Abkürzung von ”genau dann, wenn”).

2. Lösung: Wir nutzen die logischen Gesetze aus Satz 1.1 der Vorlesung, um $\neg A$ umzuformulieren. Wir beginnen, indem wir die Äquivalenz $(E \Rightarrow F) \iff ((\neg E) \vee F)$ nutzen:

$$\begin{aligned}
(\neg A) &\iff \neg(B \Rightarrow (C \wedge D)) \\
&\iff \neg((\neg B) \vee (C \wedge D)) \\
&\iff (\neg(\neg B)) \wedge (\neg(C \wedge D)) && \text{(de Morgan)} \\
&\iff (B \wedge ((\neg C) \vee (\neg D))) && \text{(doppelte Negation, de Morgan)}
\end{aligned}$$

Zurückübersetzt in normale Sprache bedeutet das: Das Wetter ist schön und (trotzdem) fährt Max nicht an den See oder geht nicht baden.
oder Das Wetter ist schön, aber fährt Max nicht an den See oder geht nicht baden.

Aufgbe 2

A, B und C bezeichnen Aussagen.

1. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen logische Gesetze sind (siehe auch Satz 1.1. der Vorlesung):

   a) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \quad \Rightarrow \quad (A \Rightarrow C)$.
   b) $(A \Leftrightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$.
   c) $(\neg(A \wedge B)) \quad \Leftrightarrow \quad ((\neg A) \vee (\neg B))$.

2. Formulieren Sie mit Hilfe von A, B und den logischen Verknüpfungen $\wedge, \vee, \neg$ eine Aussage, die genau dann wahr ist, wenn **entweder** A **oder** B wahr ist.
   (Beweisen Sie Ihren Vorschlag).

Lösung:

Zu 1a) Wir stellen die Wahrheitstafel für diese Implikation auf:

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow C$	$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	F	F	W
W	F	W	F	W	F	W	W
W	F	F	F	W	F	F	W
F	W	W	W	W	W	W	W
F	W	F	W	F	F	W	W
F	F	W	W	W	W	W	W
F	F	F	W	W	W	W	W

Die behauptete Implikation $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ ist also unabhängig von den Wahrheitswerten von A, B und C stets wahr, sie ist also ein logisches Gesetz.

Zu 1b) Wir stellen wieder eine Wahrheitstafel auf:

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$
W	W	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	W
F	W	F	W	F	F	W
F	F	W	W	W	W	W

Die behauptete Äquivalenz $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$ ist also unabhängig von den Wahrheitswerten von A und B stets wahr, sie ist also ein logisches Gesetz.

Zu 1c) Wir stellen erneut eine Wahrheitstafel auf:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	$(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$
W	W	W	F	F	F	F	W
W	F	F	W	F	W	W	W
F	W	F	W	W	F	W	W
F	F	F	W	W	W	W	W

Die behauptete Äquivalenz $(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$ ist also unabhängig von den Wahrheitswerten von A und B stets wahr, sie ist also ein logisches Gesetz.

Zu 2. Genauso wie wir es in der Vorlesung für *und*, *oder* etc. getan haben, legen wir zunächst genau fest, was wir unter der Aussage *entweder* A *oder* B verstehen wollen. Diese Aussage soll genau dann wahr sein, wenn A wahr ist und B nicht oder umgekehrt. Mithilfe einer Wahrheitstafel definieren wir formal:

A	B	entweder A oder B
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Behauptung: Die Aussage *entweder* A *oder* B ist äquivalent zu

$$(A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B).$$

Zum Beweis stellen wir die Wahrheitstafeln für diese Aussagen auf:

A	B	entweder A oder B	$(\neg A) \wedge B$	$A \wedge (\neg B)$	$(A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B)$
W	W	F	F	F	F
W	F	W	F	W	W
F	W	W	W	F	W
F	F	F	F	F	F

Wir sehen, dass die Aussagen *entweder* A *oder* B und $(A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B)$ für alle möglichen Wahrheitswerte von A und B die gleichen Wahrheitswerte annehmen, sie sind also äquivalent.

Eine weitere korrekte Lösung ist:

Die Aussage *entweder* A *oder* B ist äquivalent zu

$$(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B)).$$

Zum Beweis stellen wir wieder die Wahrheitstafeln für diese Aussagen auf:

A	B	entweder A oder B	$A \vee B$	$\neg(A \wedge B)$	$(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$
W	W	F	W	F	F
W	F	W	W	W	W
F	W	W	W	W	W
F	F	F	F	W	F

Aufgabe 3

Formalisieren Sie die folgende Aussage und untersuchen Sie, ob sie wahr ist:

Wenn keine Klausur geschrieben wird, sind die Studenten glücklich. Wenn die Studenten glücklich sind, fühlt der Dozent sich wohl. Wenn der Dozent sich aber wohl fühlt, hat er keine Lust, Vorlesung zu halten. Wird aber keine Klausur geschrieben, dann hat er Lust, Vorlesung zu halten. Also wird eine Klausur geschrieben.

Lösung: Wir definieren als Aussagen:

K: *Es wird eine Klausur geschrieben.*
G: *Die Studenten sind glücklich.*
W: *Der Dozent fühlt sich wohl.*
L: *Der Dozent hat Lust, Vorlesung zu halten.*

Dann kann man die obige Aussage formal auf folgende Weise ausdrücken:

$$\underbrace{((\neg K \Rightarrow G) \wedge (G \Rightarrow W) \wedge (W \Rightarrow \neg L) \wedge (\neg K \Rightarrow L))}_{= \text{Voraussetzung } V} \Longrightarrow K. \qquad (*)$$

Behauptung: *Die Aussage (*) ist wahr.*

Beweis: Wir zeigen dazu, dass aus der Gültigkeit der Voraussetzung V die Gültigkeit von K folgt (denn dann ist die Implikation $(V \Longrightarrow K)$, d.h. die Aussage (*), wahr).

Wenn V wahr ist, dann sind die beiden Teilaussagen

V1: $(\neg K \Rightarrow G) \wedge (G \Rightarrow W) \wedge (W \Rightarrow \neg L)$,

V2: $(\neg K \Rightarrow L)$

beide wahr. Aus der Transitivität der Implikation folgt wegen der Gültigkeit von $V1$, dass $(\neg K) \Rightarrow (\neg L)$ wahr ist. Aus dem Kontrapositionsgesetz und der doppelten Negation folgt wegen der Gültigkeit von $V2$, dass $(\neg L) \Rightarrow K$ wahr ist. Nun folgt wiederum aus der Transitivität der Implikation wegen der Gültigkeit von $(\neg K) \Rightarrow (\neg L)$ und $(\neg L) \Rightarrow K$, dass $\neg K \Rightarrow K$ wahr ist. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn K wahr ist.

Damit haben wir gezeigt, dass die Aussage (*) wahr ist.