Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik, HU Berlin

Musterlösungen zum Übungsblatt 2

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)
Wintersemester 2017/18

Aufgabe 4

M, N und Y bezeichnen Mengen. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

a) $(M \cap N) \setminus Y = (M \setminus Y) \cap (N \setminus Y)$.

b) $(M \cup N) \times Y = (M \times Y) \cup (N \times Y)$.

c) $(M \setminus N) \times Y = (M \times Y) \setminus (N \times Y)$.

Lösung: Mit Hilfe einer Wahrheitstabelle zeigt man die folgenden Gesetze für die logische Operation *und*, die wir im Folgenden benutzen werden:
Seien A, B, C Aussagen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} ((A \wedge B) \wedge C) &\iff ((A \wedge C) \wedge (B \wedge C)) \qquad (*) \\ ((A \wedge B) \wedge C) &\iff (A \wedge B) \wedge (C \wedge B) \qquad (**) \end{aligned}$$

Zu 4a) *Beweisstrategie*: Wir benutzen, dass zwei Mengen M_1 und M_2 genau dann gleich sind, wenn gilt:

$$x \in M_1 \iff x \in M_2.$$

$$\begin{aligned} x \in (M \cap N) \setminus Y &\overset{\text{Def.}\setminus}{\iff} x \in M \cap N \text{ und } x \notin Y \\ &\overset{\text{Def.}\cap}{\iff} (x \in M \text{ und } x \in N) \text{ und } x \notin Y \\ &\overset{(*)}{\iff} (x \in M \text{ und } x \notin Y) \text{ und } (x \in N \text{ und } x \notin Y) \\ &\overset{\text{Def.}\setminus}{\iff} x \in M \setminus Y \text{ und } x \in N \setminus Y \\ &\overset{\text{Def.}\cap}{\iff} x \in (M \setminus Y) \cap (N \setminus Y) \end{aligned}$$

Zu 4b) Wir benutzen die gleiche Beweisstrategie wie bei 4a). Außerdem verwenden wir die Distributivgesetze für die logischen Operatoren *und* und *oder*. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} (x, y) \in (M \cup N) \times Y &\overset{\text{Def.}\times}{\iff} x \in M \cup N \text{ und } y \in Y \\ &\overset{\text{Def.}\cup}{\iff} (x \in M \text{ oder } x \in N) \text{ und } y \in Y \\ &\overset{\text{Distrib.}}{\iff} (x \in M \text{ und } y \in Y) \text{ oder } (x \in N \text{ und } y \in Y) \\ &\overset{\text{Def.}\times}{\iff} (x, y) \in M \times Y \text{ oder } (x, y) \in N \times Y \\ &\overset{\text{Def.}\cup}{\iff} (x, y) \in (M \times Y) \cup (N \times Y) \end{aligned}$$

Zu 4c) *Beweisstrategie:* Wir beweisen die Gleichheit zweier Mengen M_1 und M_2 in zwei Schritten:

1. Schritt: $x \in M_1 \Longrightarrow x \in M_2$ (d.h. $M_1 \subset M_2$).
2. Schritt: $x \in M_2 \Longrightarrow x \in M_1$ (d.h. $M_1 \supset M_2$).

Zu $\subset$:

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in (M \setminus N) \times Y &\Rightarrow (x \in M \text{ und } x \notin N) \text{ und } y \in Y \\
&\overset{(*)}{\Rightarrow} (x \in M \text{ und } y \in Y) \text{ und } (x \notin N \text{ und } y \in Y) \\
&\Rightarrow (x,y) \in M \times Y \text{ und } (x,y) \notin N \times Y \\
&\Rightarrow (x,y) \in (M \times Y) \setminus (N \times Y).
\end{aligned}
$$

Zu $\supset$:

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in (M \times Y) \setminus (N \times Y) &\Rightarrow (x \in M \text{ und } y \in Y) \text{ und } (x,y) \notin N \times Y \\
&\overset{(**)}{\Rightarrow} (x \in M \text{ und } y \in Y) \text{ und } ((x,y) \notin N \times Y \text{ und } y \in Y).
\end{aligned}
$$

Wir betrachten den letzten Teil der Aussage. Wenn $y \in Y$, dann kann $(x,y) \notin N \times Y$ nur daran liegen, dass $x \notin N$. Wir folgern also weiter:

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in (M \times Y) \setminus (N \times Y) &\Rightarrow (x \in M \text{ und } y \in Y) \text{ und } (x \notin N \text{ und } y \in Y) \\
&\overset{(*)}{\Rightarrow} (x \in M \text{ und } x \notin N) \text{ und } y \in Y \\
&\Rightarrow (x,y) \in (M \setminus N) \times Y.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5

$f : X \to Y$ und $h : Y \to Z$ seien zwei Abbildungen und $h \circ f : X \to Z$ ihre Verknüpfung. Zeigen Sie:

a) Sind f und h injektiv, so ist $h \circ f$ injektiv.

b) Sind f und h surjektiv, so ist $h \circ f$ surjektiv.

c) Ist $h \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

d) Ist $h \circ f$ surjektiv, so ist h surjektiv.

e) Geben Sie ein Beispiel für Abbildungen f und h an, so dass $h \circ f$ bijektiv ist, aber weder h injektiv, noch f surjektiv sind.

Lösung:

Zu a) Es seien f und h injektiv. Z.z. $h \circ f$ ist ebenfalls injektiv. Dazu müssen wir zeigen, dass für zwei Elemente $x_1, x_2 \in X$, die $(h \circ f)(x_1) = (h \circ f)(x_2)$ erfüllen, die Gleichheit $x_1 = x_2$ gilt.
Sei also $(h \circ f)(x_1) = (h \circ f)(x_2)$. D.h. $h(f(x_1)) = h(f(x_2))$. Da h injektiv ist, folgt $f(x_1) = f(x_2)$. Aus dieser Gleichheit folgt nun wieder wegen der Injektivität von f die Gleichheit von x_1 und x_2. Damit ist auch $h \circ f$ injektiv.

Zu b) Es seien f und h surjektiv. Z.z. $h \circ f$ ist ebenfalls surjektiv. Dazu müssen wir zeigen, daß für jedes $z \in Z$ ein $x \in X$ existiert mit $(h \circ f)(x) = z$.
Sei also $z \in Z$ beliebig. Da h surjektiv ist, existiert ein $y \in Y$ mit $h(y) = z$. Da f surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Damit folgt $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(y) = z$. Das gesuchte $x \in X$ ist also gefunden und damit ist auch $h \circ f$ surjektiv.

Zu c) Es sei nun $h \circ f$ injektiv. Z.z. f ist injektiv.

Es seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Damit gilt aber auch

$$(h \circ f)(x_1) = h(f(x_1)) = h(f(x_2)) = (h \circ f)(x_2)$$

Da $h \circ f$ injektiv ist, folgt die Gleichheit $x_1 = x_2$. Somit muss auch f injektiv sein.

Zu d) Es sei $h \circ f$ surjektiv. Z.z. h ist surjektiv.
Es sei $z \in Z$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass es ein Element $y \in Y$ mit $h(y) = z$ gibt. Da $h \circ f$ surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ mit $(h \circ f)(x) = z$. Wir setzen $y := f(x) \in Y$. Dann gilt $h(y) = h(f(x)) = (h \circ f)(x) = z$. D.h. $y = f(x)$ ist das gesuchte Element und h ist surjektiv.

Zu e) Wir wählen als Funktionen:

$$\begin{array}{rcl} f : \{1\} & \longrightarrow & \{1,2\}, \\ 1 & \mapsto & 1 \\ & & \\ h : \{1,2\} & \longrightarrow & \{1\}. \\ 1 & \mapsto & 1 \\ 2 & \mapsto & 1 \end{array}$$

f ist nicht surjektiv, da $Im(f) = f(\{1\}) = \{1\} \neq \{1,2\}$. h ist nicht injektiv, da $h(1) = 1 = h(2)$. Trotzdem ist die Verkettung $h \circ f : \{1\} \longrightarrow \{1\}$ bijektiv, da $h \circ f = id_{\{1\}}$.

Aufgabe 6

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A_1, A_2 \subset X$.

1. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:
   a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
   b) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
2. Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass in *b)* *nicht* immer Gleichheit gilt.
3. Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ für alle Teilmengen $A_1, A_2 \subset X$ gilt.

Lösung:

Zu 1a)

$$\begin{array}{rcl} y \in f(A_1 \cup A_2) & \Longleftrightarrow & \exists\, x \in A_1 \cup A_2 \text{ mit } f(x) = y \\ & \Longleftrightarrow & (\exists\, x \in A_1 \text{ mit } f(x) = y) \text{ oder } (\exists\, x \in A_2 \text{ mit } f(x) = y) \\ & \Longleftrightarrow & y \in f(A_1) \text{ oder } y \in f(A_2) \\ & \Longleftrightarrow & y \in f(A_1) \cup f(A_2). \end{array}$$

Zu 1b)

$$\begin{array}{rcl} y \in f(A_1 \cap A_2) & \Longleftrightarrow & \exists\, x \in A_1 \cap A_2 \text{ mit } f(x) = y \\ & \overset{!}{\Longrightarrow} & (\exists\, x_1 \in A_1 \text{ mit } f(x_1) = y) \text{ und } (\exists\, x_2 \in A_2 \text{ mit } f(x_2) = y) \\ & \Longleftrightarrow & y \in f(A_1) \text{ und } y \in f(A_2) \\ & \Longleftrightarrow & y \in f(A_1) \cap f(A_2) \end{array}$$

Es folgt $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
(Man beachte, dass in der 2.Zeile nur eine Implikation steht und keine Äquivalenz).

Zu 2) Wir betrachten die folgende Funktion:

$$\begin{aligned} f:\{1,2,3\} &\longrightarrow \{1,2\}. \\ 1 &\mapsto 1 \\ 2 &\mapsto 2 \\ 3 &\mapsto 1 \end{aligned}$$

Sei $A_1 := \{1,2\}$ und $A_2 := \{2,3\}$. Dann gilt $A_1 \cap A_2 = \{2\}$, also $f(A_1 \cap A_2) = \{2\}$. Da $f(A_1) = \{1,2\}$ und $f(A_2) = \{1,2\}$, folgt $f(A_1) \cap f(A_2) = \{1,2\}$, folglich gilt $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

Zu 3) Für den Beweis nutzen wir das folgende logische Gesetz für zwei Aussagen A ,B:

$$(A \iff B) \iff ((A \implies B) \wedge (B \implies A)).$$

D.h. wir zeigen

a) f injektiv $\implies$ Für alle $A_1, A_2 \subset X$ gilt $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
b) Für alle $A_1, A_2 \subset X$ gilt $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2) \implies f$ ist injektiv.

Zu a): Wir führen einen indirekten Beweis. Es sei f injektiv. Angenommen es gäbe Teilmengen $A_1, A_2 \subset X$ mit $f(A_1 \cap A_2) \subsetneq f(A_1) \cap f(A_2)$. Dann gäbe es ein $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, das nicht in $f(A_1 \cap A_2)$ liegt. D.h. es gäbe Elemente $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ mit $f(x_1) = f(x_2) = y$. Aber gleichzeitig wäre für alle $x \in A_1 \cap A_2$ $f(x) \neq y$. Insbesondere folgt daraus $x_1 \notin A_2$ und $x_2 \notin A_1$. Somit muss $x_1 \neq x_2$ gelten und f wäre nicht injektiv. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass f injektiv ist. Also ist unsere Annahme falsch. Folglich muss die Gleichheit $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ für alle Teilmengen $A_1, A_2 \subset X$ gelten.

Zu b): Es gelte für alle Teilmengen $A_1, A_2 \subset X$ die Gleichheit $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$. Wir zeigen, dass f injektiv ist: Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2) =: y$. Dann gilt also $f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = \{y\} \cap \{y\} = \{y\} \neq \emptyset$. Wäre $x_1 \neq x_2$, so wäre $f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = f(\emptyset) = \emptyset$. Dies wäre ein Widerspruch zur vorausgesetzten Gleichheit $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ für alle Teilmengen $A_1, A_2 \subset X$. Folglich muss $x_1 = x_2$ gelten und f damit injektiv sein.