Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik, HU Berlin

Musterlösungen zum Übungsblatt 3

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)
Wintersemester 2017/18

Aufgabe 7 Beweisen Sie folgende Summenformeln:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!} = \frac{n!-1}{n!}$.

c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{x+k}{k} = \binom{x+n+1}{n}$.

Lösung: Wir beweisen alle drei Aussagen mit vollständiger Induktion. Wir erinnern nochmal an das Beweisprinzip der vollständigen Induktion:

Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$ fixiert und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0$ eine Aussage $A(n)$ gegeben. Es gelten:
Induktionsanfang: $A(n_0)$ ist wahr.
Induktionsschritt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt: Ist $A(n)$ wahr, so ist $A(n+1)$ wahr.
(d.h. die Implikation $A(n) \Longrightarrow A(n+1)$ ist wahr).

Dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

(Wir setzen im Induktionsschritt also voraus, dass für ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0$ die Aussage $A(n)$ gilt (*Induktionsvoraussetzung*) und zeigen unter Benutzung dieser Induktionsvoraussetzung, dass $A(n+1)$ gilt.)

Zu a) $A(n)$: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr, denn es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1}{6}1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1).$$

Induktionssschritt:

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n)$.
Induktionsbehauptung: Es gilt $A(n+1)$:
Induktionsbeweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&\overset{IVor}{=} \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\
&= (n+1)\Big(\frac{1}{6}n(2n+1) + (n+1)\Big) \\
&= (n+1)\Big(\frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6}\Big) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)\\
&= \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)
\end{aligned}$$

Dies ist aber gerade die Aussage $A(n+1)$, d.h. die Gültigkeit von $A(n+1)$ ist gezeigt. $\Box$
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage $A(n)$ somit für alle natürlichen Zahlen.

Zu b) $A(n): \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!} = \frac{n!-1}{n!}$.

Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr, denn es gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k-1}{k!} = \frac{0}{1} = 0 = \frac{1!-1}{1!}.$$

Induktionssschritt:
Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n)$.
Induktionsbehauptung: Es gilt $A(n+1)$:
Induktionsbeweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{k!} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!} + \frac{n}{(n+1)!}\\
&\stackrel{IVor}{=} \frac{n!-1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!}\\
&= \frac{(n!-1)(n+1)+n}{(n+1)!}\\
&= \frac{n!(n+1)-(n+1)+n}{(n+1)!}\\
&= \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Dies ist aber gerade die Aussage $A(n+1)$, d.h. $A(n+1)$ ist wahr. $\Box$
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage $A(n)$ somit für alle natürlichen Zahlen.

Zu c) $A(n):$ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sum_{k=0}^{n} \binom{x+k}{k} = \binom{x+n+1}{n}$.

Induktionsanfang: $A(0)$ ist wahr, denn es gilt:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{x+k}{k} = \binom{x}{0} \stackrel{Def}{=} 1 \stackrel{Def}{=} \binom{x+1}{0}.$$

Induktionssschritt:
Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $A(n)$.
Induktionsbehauptung: Es gilt $A(n+1)$:
Induktionsbeweis: Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{x+k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x+k}{k} + \binom{x+n+1}{n+1}$$

$$\begin{aligned} &\overset{IVor}{=} && \binom{x+n+1}{n} + \binom{x+n+1}{n+1} \\ &\overset{VL,Satz12}{=} && \binom{x+n+2}{n+1} \end{aligned}$$

Dies ist aber gerade die Aussage $A(n+1)$, d.h. $A(n+1)$ ist wahr. □
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage $A(n)$ somit für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 8 Zeigen Sie:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $d_n := n^3 + 5n$ durch 6 teilbar.

b) Jede natürliche Zahl $n \geq 8$ kann man in der Form $n = 3s_n + 5t_n$ mit $s_n, t_n \in \mathbb{N}_0$ darstellen.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Sind $x_1, \ldots, x_n$ positive reelle Zahlen mit $\prod_{k=1}^{n} x_k = 1$, so gilt $\sum_{k=1}^{n} x_k \geq n$. Die Gleichheit tritt dabei genau dann ein, wenn $x_1 = \ldots = x_n = 1$.

Lösung: Wir beweisen alle drei Aussagen wieder mit vollständiger Induktion.

Zu a) *Induktionsanfang:* d_1 ist durch 6 teilbar, denn $d_1 = 1 + 5 = 6$.

Induktionsschritt:
Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ ist d_n durch 6 teilbar.
Induktionsbehauptung: d_{n+1} ist durch 6 teilbar.
Induktionsbeweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= (n+1)^3 + 5(n+1) \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 \\ &= d_n + 3n^2 + 3n + 6 \\ &= d_n + 3n(n+1) + 6. \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist d_n durch 6 teilbar. $n(n+1)$ ist immer eine gerade Zahl, d.h. $3n(n+1)$ ist durch 6 teilbar und 6 ist ebenfalls durch 6 teilbar. Folglich ist d_{n+1} durch 6 teilbar. □
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist deshalb d_n für jedes n durch 6 teilbar.

Zu b) *Induktionsanfang:* $8 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1$. In diesem Fall ist also $s_8 = t_8 = 1$.

Induktionsschritt:
Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \geq 8$ existieren $s_n, t_n \in \mathbb{N}_0$, so dass $n = 3s_n + 5t_n$.
Induktionsbehauptung: Es existiert ein $s_{n+1} \in \mathbb{N}_0$ und ein $t_{n+1} \in \mathbb{N}_0$, so dass
$n + 1 = 3s_{n+1} + 5t_{n+1}$.
Induktionsbeweis:

1.Fall: Sei $t_n \neq 0$. Dann folgt aus der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} n+1 &\overset{IVor}{=} 3s_n + 5t_n + 1 \\ &= 3(s_n+2) + 5(t_n - 1). \end{aligned}$$

Also sind $s_{n+1} := s_n + 2$ und $t_{n+1} := t_n - 1$ zwei Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ mit $n+1 = 3s_{n+1} + 5t_{n+1}$.
2. Fall: $t_n = 0$. Dann gilt $n = 3s_n$. Da $n \geq 8$, muß $s_n \geq 3$ gelten. Wir erhalten

$$n+1 = 3s_n + 1 = 3(s_n - 3) + 9 + 1 = 3(s_n - 3) + 5 \cdot 2.$$

Es gilt also $n+1 = 3s_{n+1} + 5t_{n+1}$ mit $s_{n+1} := s_n - 3 \in \mathbb{N}_0$ und $t_{n+1} = 2$. $\square$
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Behauptung b) deshalb für alle $n \geq 8$.

Zu c) Die Aussage $A(n)$ lautet:
Sind $x_1, \ldots, x_n$ positive reelle Zahlen mit $\prod_{k=1}^{n} x_k = 1$, dann gilt $\sum_{k=1}^{n} x_k \geq n$, wobei Gleichkeit genau dann auftritt, wenn $x_1 = \ldots = x_n = 1$.

Induktionsanfang: Die Ausage $A(1)$ ist wahr, denn für eine positive reelle Zahl x_1 mit $x_1 = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{1} x_k = x_1 = 1 \geq 1$.
Induktionsschritt:
Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n)$.
Induktionsbehauptung: $A(n+1)$ gilt.
Induktionsbeweis: Seien $x_1, \ldots, x_{n+1}$ positive reelle Zahlen mit $\prod_{k=1}^{n+1} x_k = 1$.
1. Fall: Sei $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n+1} = 1$. Dann gilt $\sum_{k=1}^{n+1} x_k = n+1 \geq n+1$.
2. Fall: Sei eine der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ von 1 verschieden. Da $\prod_{k=1}^{n+1} x_k = 1$, muß es unter den Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ dann eine geben, die kleiner als 1 ist, und eine, die größer als 1 ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (Umnummerieren) nehmen wir an, dass $x_n < 1$ und $x_{n+1} > 1$. Wir wenden nun die Induktionsvoraussetzung auf die positiven reellen Zahlen

$$y_1 := x_1,\ y_2 := x_2,\ \ldots,\ y_{n-1} := x_{n-1},\ y_n := x_n \cdot x_{n+1}$$

an. Da $y_1 \cdot \ldots \cdot y_n = 1$, gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} n \leq \sum_{k=1}^{n} y_k &= \sum_{k=1}^{n-1} x_k + x_n \cdot x_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} x_k - x_n - x_{n+1} + x_n \cdot x_{n+1}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k \geq n + x_n + x_{n+1} - x_n \cdot x_{n+1}. \qquad (*)$$

Da $x_n < 1$ und $x_{n+1} > 1$, gilt

$$(x_n - 1)(x_{n+1} - 1) < 0, \qquad \text{also} \qquad x_n \cdot x_{n+1} - x_n - x_{n+1} + 1 < 0.$$

Daraus folgt

$$x_n + x_{n+1} - x_n \cdot x_{n+1} > 1$$

und wir können in $(*)$ weiter abschätzen:

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k \geq n + x_n + x_{n+1} - x_n \cdot x_{n+1} > n + 1.$$

Dies zeigt, dass $A(n+1)$ wahr ist. Wir haben die Abschätzung erhalten und auch gesehen, dass in dieser Abschätzung die Gleichheit nur dann stehen kann, wenn der 1. Fall eintritt, also $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n+1} = 1$ gilt. $\square$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Aufgabe 9

a) Beweisen Sie das folgende Induktionsschema:
Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0$ sei eine Ausssage $A(n)$ mit den folgenden Eigenschaften gegeben:

- $A(n_0)$ ist wahr und
- für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0$ gilt: Sind $A(m)$ wahr für alle $n_0 \leq m \leq n$, dann ist $A(n+1)$ wahr.

Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0$ wahr.

b) Beweisen Sie: Es gibt genau $\binom{n-k+1}{k}$ verschiedene Möglichkeiten, k Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ so auszuwählen, dass darunter keine zwei benachbarten sind (wobei k hier eine natürliche Zahl zwischen 1 und n ist).

Lösung:

Zu a) Wir betrachten die Aussage $B(n) := A(n_0) \wedge A(n_0+1) \wedge \ldots \wedge A(n)$. Dann gilt auf Grund der Eigenschaften von $A(n)$:

- $B(n_0) = A(n_0)$ ist wahr.
- Für alle $n \geq n_0$: Wenn $B(n)$ gilt, so gilt auch $B(n+1)$,
denn: $B(n)$ ist genau dann wahr, wenn alle $A(m)$ für $n_0 \leq m \leq n$ gelten (Wahrheitswert der Operation *und*). Dann gilt aber nach der 2. Eigenschaft der $A(n)$, dass $A(n+1)$ wahr ist. Folgich ist auch $B(n+1) = B(n) \wedge A(n+1)$ wahr.

Aus dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt dann, dass $B(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq n_0$ wahr ist, und daraus insbesondere, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq n_0$ wahr ist.

Zu b) Vereinbarung: Ist $\mathcal{K}$ eine endliche Menge, dann bezeichnet $\sharp\mathcal{K}$ die Anzahl ihrer Elemente.
Seien k, n natürliche Zahlen mit $1 \leq k \leq n$ und bezeichne D_k^n die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, k Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ so auszuwählen, dass darunter keine zwei benachbarten sind. Wir wollen zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage $A(n)$ gilt:

$$D_k^n = \binom{n-k+1}{k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } 1 \leq k \leq n.$$

Wir benutzen dazu das unter a) bewiesene Induktionsprinzip.

Induktionsanfang: $A(1)$ gilt, denn man hat genau eine Möglichkeit, ein Element aus der Menge $\{1\}$ auszuwählen (benachbarte Elemente kann es nicht geben), d.h. $D_1^1 = 1$. Anderseits gilt auch $\binom{1-1+1}{1} = \binom{1}{1} = 1$.

Induktionsschritt:
Induktionsvoraussetzung: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $A(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq n$, d.h. es gelte

$$D_k^m = \binom{m-k+1}{k} \quad \forall\, m, k \in \mathbb{N} \text{ mit } 1 \leq m \leq n \text{ und } 1 \leq k \leq m.$$

Induktionsbehauptung: Es gilt $A(n+1)$, d.h.

$$D_k^{n+1} = \binom{n+1-k+1}{k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \text{ mit } 1 \leq k \leq n+1.$$

Induktionsbeweis: Sei zunächst $k = 1$. Dann gilt $D_1^{n+1} = n+1$ und $\binom{n+1-1+1}{1} = \binom{n+1}{1} = n+1$. Für $k = 1$ gilt Induktionsbehauptung somit. Sei $k = n+1$. Dann gilt $D_{n+1}^{n+1} = 0$ (denn wenn man alle Zahlen auswählt, müssen benachbarte Zahlen auftreten) und $\binom{1}{n+1} = 0$ (Satz 12 der Vorlesung). D.h. die Induktionsbehauptung gilt für $k = n+1$.
Sei nun $2 \leq k \leq n$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{K}$ die Menge aller k-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$, die keine benachbarten Zahlen enthalten. Dann zerfällt $\mathcal{K}$ in die zwei disjunkten Mengen $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \dot{\cup} \mathcal{K}_1$ wobei:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0 &:= \{A \in \mathcal{K} \mid n+1 \notin A\}, \\ \mathcal{K}_1 &:= \{A \in \mathcal{K} \mid n+1 \in A\}. \end{aligned}$$

Ist $A \in \mathcal{K}_0$, besteht A also aus k nicht benachbarten Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ und es gilt $1 \leq k \leq n$. Also ist nach Induktionsvoraussetzung

$$\sharp \mathcal{K}_0 = D_k^n \overset{IVor}{=} \binom{n-k+1}{k}.$$

Ist $A \in \mathcal{K}_1$, so enthält A die Zahl $n+1$, sie kann also die benachbarte Zahl n nicht enthalten. Außer $n+1$ enthält A noch $(k-1)$ nichtbenachbarte Zahlen aus der Menge $\{1, \dots, n-1\}$ und es gilt $1 \leq k-1 \leq n-1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt somit

$$\sharp \mathcal{K}_1 = D_{k-1}^{n-1} \overset{IVor}{=} \binom{n-(k-1)}{k-1} = \binom{n-k+1}{k-1}.$$

Folglich gilt:

$$D_k^{n+1} = \sharp \mathcal{K} = \sharp \mathcal{K}_0 + \sharp \mathcal{K}_1 = \binom{n-k+1}{k} + \binom{n-k+1}{k-1} \overset{VL, Satz 12}{=} \binom{(n+1)-k+1}{k}.$$

Folglich gilt die Aussage $A(n+1)$. $\square$.
Nach dem Induktionsprinzip in a) gilt damit die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.