Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. A. Fauck, Dr. D. Agostini, Dipl. I. Schwarz,
J. Hauber, M. Majchrzak, L. Upmeier zu Belzen

Analysis I*
WiSe 2018/19

Übungsblatt 14

Schriftliche Abgabe: Dienstag 5. Februar 2019
Schreiben Sie auf jede Lösung bitte ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + ev. Zeit)

Aufgabe 14.1 (2+2+2 Punkte)

a) Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen und sei $D \subseteq X$ eine dichte Teilmenge. Zeigen Sie, dass $f(D)$ dicht in $f(X)$ ist.

b) Seien $f, g\colon X \to Y$ stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen und sei $D \subseteq X$ eine dichte Teilmenge, sodass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D$. Zeigen Sie, dass $f = g$.

c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist f stetig, so gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ sodass $f(x) = c \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
(Hinweis: Bestimmen Sie $f(q)$ für $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.)

Aufgabe 14.2 (3+2 Punkte) Seien $0 < a < b < c$ reelle Zahlen.

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $a^x + b^x = c^x$ genau eine Lösung $x_0 \in \mathbb{R}$ hat.

b) Zeigen Sie, dass für x_0 gilt: $0 < x_0 < \frac{\log 2}{\log c - \log b}$.

Aufgabe 14.3 (2+2 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender reeller Funktionen

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}.$$

b) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Aufgabe 14.4 (1+2+2 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Abbildung

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [n, n+1] \\ 0, & \text{falls } x \notin [n, n+1] \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie f_n.

b) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge (f_n) gegen 0 konvergiert.

c) Zeigen Sie, dass (f_n) nicht gleichmäßig konvergent ist.

Schriftliche Zusatzaufgabe 14.Z (3 Punkte) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine surjektive Abbildung mit folgender Eigenschaft: Wenn eine Folge (x_n) nicht konvergent ist, dann ist auch $(f(x_n))$ nicht konvergent. Zeigen Sie, dass f stetig ist. [Hinweis: Aufgabe 14.A].

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 14.A Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung.

a) Zeigen Sie: f ist injektiv genau dann, wenn f streng monoton ist (wachsend oder fallend).

b) Zeigen Sie: Ist f bijektiv, so ist f^{-1} stetig.

Aufgabe 14.B Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gleichmaßig stetig Abbildung. Zeigen Sie, dass $a, b \in \mathbb{R}$ existieren sodass

$$|f(x)| \leq a|x| + b \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 14.C Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{e^z - 1}{z}$ (Hinweis: Nutzen Sie die Reihendarstellung von e^z und gleichmäßige Konvergenz)

Aufgabe 14.D Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $f\colon X \to X$ eine Isometrie, d.h. $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in X$. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist, indem Sie zeigen

a) f ist injektiv und stetig.

b) Wenn $y \notin f(X)$, dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $d(f(x), y) > \varepsilon$ für alle $x \in X$ [Hinweis: Extremalprinzip].

c) Wenn $y \notin f(X)$, dann ist $d(f^n(y), f^m(y)) > \varepsilon$ für alle $n > m \geq 0$. Leiten Sie daraus einen Widerspruch ab.

Zeigen Sie außerdem, dass f^{-1} eine Isometrie ist.

Aufgabe 14.E Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge (f_n), $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (x - n)^2}$$

konvergiert aber nicht gleichmäßig konvergiert.