Kurven und Flächen
WiSe 2017/18

Übungsblatt 10

Schriftliche Abgabe: Mittwoch 10. Januar 2018, vor der Vorlesung

Aufgabe 10.1 Seien $R > r > 0$ beliebig. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Torus gegeben als Drehfläche mit der Erzeugenden

$$e : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad e(u^1) = (r \cos u^1 + R, 0, r \sin u^1).$$

Aufgabe 10.2
Bestimmen Sie mit Mitteln dieser Vorlesung den Inhalt der Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfes der Höhe h mit r als Radius der Deckfläche und R als Radius der Grundfläche.

Aufgabe 10.3* (Der Schwarzsche Stiefel)

a) Sei ein gerader Kreiszylinder vom Radius $R > 0$ und der Höhe h gegeben. In die Deck- und Grundfläche sei jeweils ein regelmäßiges n-Eck einbeschrieben, jedoch so, dass sie um $2\pi/2n$ zueinader verdreht sind (bei der Draufsicht liegen dann die Ecken des einen n-Ecks genau zwischen den Ecken des anderen n-Ecks). Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt der Dreiecke Δ, die jeweils von zwei benachbarten Ecken des selben n-Ecks und der dazwischen liegenden Ecke des anderen n-Ecks bestimmt werden, gilt
$$A[\Delta] = \frac{1}{2}(2r \sin \frac{\pi}{n}) \sqrt{h^2 + r^2 \big(1 - \cos \frac{\pi}{n}\big)}.$$

b) Sei nun ein gerader Kreiszylinder vom Radius $R = 1$ und der Höhe $h = 1$ in k Zylinder der Höhe $1/k$ zerlegt und in die Zwischenkreisscheiben regelmäßige n-Ecke einbeschrieben, sodass zwei benachbarte jeweils um π/n verdreht sind. Man erhält nun eine Triangulierung des gesamten Zylinders indem man in jedem kleinen Zylinder Dreiecke wie in a) bildet. Zeigen Sie, dass man k in Abhängigkeit von n so wählen kann, dass der Flächeninhalt der Triangulierung gege $+\infty$ konvergiert, falls n gegen 0 geht.

Die mit * gekennzeichnete Aufgabe ist freiwillig und etwas aufwendiger.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen

Aufgabe 10.4 Bestimmen Sie den Oberflächeninhalt von

- einem Drehkegel der Höhe h und dem Öffnungswinkel α,
- einem schrägen Zylinder mit Höhe h, Neigungswinkel α und Kantenlänge l,
- einem schräg abgeschnittenen geraden Zylinder,
- der Wendelfläche $W : [0, 2\pi] \times [0, r] \to \mathbb{R}^3, \quad W(u^1, u^2) = (u^2 \cos u^1, u^2 \sin u^1, hu^1)$.