Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. A. Fauck

Kurven und Flächen
WiSe 2017/18

Übungsblatt 11

Schriftliche Abgabe: Mittwoch 17. Januar 2018, vor der Vorlesung

Aufgabe 11.1
Zeigen Sie, dass für eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve in einer Ebene mit Krümmung k, Normalkrümmung k_n und geodätischer Krümmung k_g gilt: $k_n = 0$ und $|k_g| = k$.

Aufgabe 11.2
Bestimmen Sie den Flächeninhalt der durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$ bestimmten Ellipse.

Aufgabe 11.3
Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2, c(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ eine differenzierbare einfach geschlossene Kurve, d.h. c ist 3-mal stetig differenierbar und $c(a) = c(b),\ \dot{c}(a) = \dot{c}(t), \ddot{c}(a) = \ddot{c}(b)$. Ferner sei c nach der Bogenlänge parametrisiert und positiv orientiert. Schließlich sei auch die Kurve $d(t) = c(t) - rn(t)$ für ein $r > 0$ einfach geschlossen (dabei ist $n(t)$ die Normale von c). Zeigen Sie:

a) $\int_a^b \ddot{y}(t)y(t) - \big(\dot{x}(t)\big)^2 \,\mathrm{d}t = b - a$,

b) $\int_a^b \ddot{y}(t)\dot{x}(t) \,\mathrm{d}t = \int_a^b k(t) \,\mathrm{d}t$, wobei k die Krümmung von c ist.

c)* Für die von c bzw. d berandeten Flächen C bzw. D gilt $A[D] = A[C] + (b-a)r + \pi r^2$.

Die mit * gekennzeichnete Aufgabe ist freiwillig und etwas aufwendiger.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen

Aufgabe 11.4 Zeigen Sie, dass die Weingartenabbildung $L : T_{(u^1,u^1)}F \to T_{(u^1,u^2)}F$ bis auf einen eventuellen Vorzeichenwechsel invariant unter Parametertransformationen ist.

Aufgabe 11.5 Bestimmen Sie die 2. Fundamentalform und die Weingartenabbildung von Drehflächen. Für welche Drehflächen ist wenigstens eine Hauptkrümmung 0?

Aufgabe 11.6
Bestimmen Sie die Hauptkrümmungen für jeden Punkt einer Kugel vom Radius R.

Aufgabe 11.7
Bestimmen Sie die Hauptkrümmungen im Urspung für den Hyperbolischen Paraboloid

$$P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, P(u^1, u^2) = \left(u^1, u^2, \frac{(u^2)^2 - (u^1)^2}{2}\right).$$