



---

## Übungsblatt 13

Schriftliche Abgabe: Mittwoch 31. Januar 2018, vor der Vorlesung

---

### Aufgabe 13.1

Zeigen Sie, dass sich auch  $g_{12}(u^1, u^2) = g_{21}(u^1, u^2)$  durch Messungen (d.h. nur unter der Verwendung von Längen von Flächenkurven) in einer Fläche  $F$  bestimmen lassen. Betrachten Sie dazu die Flächenkurve  $c(s) = F(u^1 + s, u^2 + s)$  und bestimmen Sie ihre Länge  $l(t)$  auf dem Intervall  $[0, t]$ . Betrachten Sie dann die Ableitung von  $l$  in 0 um  $g_{12}(u^1, u^2)$  zu bestimmen. Dabei können Sie  $g_{11}(u^1, u^2)$  und  $g_{22}(u^1, u^2)$  nach der Vorlesung als bekannt voraussetzen.

### Aufgabe 13.2

Betrachten Sie folgende Parametrisierung des Drehzylinders zu  $R > 0$ :

$$D : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad D(u^1, u^2) = \left( R \sin \frac{u^2}{R}, R \cos \frac{u^2}{R}, u^1 \right)$$

- Zeigen Sie, dass das Bild einer Geraden in  $\mathbb{R}^2$  unter  $D$  entweder ein Breitenkreis ( $u^2$ -Linie), ein Meridian ( $u^1$ -Linie) oder eine Schraubenlinie ist.
- Begründen Sie, dass eine kürzeste Verbindung im Zylinder zwischen 2 beliebigen Punkten auf dem Zylinder stets ein Teil einer der 3 in a) genannte Kurven ist. (Hinweis: Vergleichen Sie die Länge einer Kurve  $u$  in  $\mathbb{R}^2$  mit der Länge ihres Bildes  $D \circ u$  in  $\mathbb{R}^3$ .)

---

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen

### Aufgabe 13.3

Sei  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein regulär parametrisiertes Flächenstück, sodass für die metrischen Fundamentalgrößen gilt:

$$g_{11} = C, \quad g_{12} = g_{21} = 0 \quad \text{für alle } (u^1, u^2) \in G.$$

Seien  $P = F(p, u_0^2)$  und  $Q = F(q, u_0^2)$  zwei Flächenpunkte mit der selben  $u^2$ -Koordinate. Dann ist die kürzeste Verbindung zwischen  $P$  und  $Q$  in  $F$  eine  $u^1$ -Linie.

**Aufgabe 13.4** Betrachten Sie die Parametrisierung einer Drehfläche mit einer Erzeugenden  $e$ , die nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Finden Sie eine möglichst einfache Formel dafür, dass die Gaußkrümmung konstant ist.

**Aufgabe 13.5** Bestimmen Sie alle Drehflächen mit konstanter Gaußkrümmung  $K = 0$ .

**Aufgabe 13.6** Finden Sie Drehflächen mit konstanter Gaußkrümmung  $K = -1$ .