Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. A. Fauck

Kurven und Flächen
WiSe 2017/18

Übungsblatt 2

Schriftliche Abgabe: Mittwoch 1. November 2017, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 2.1 Seien $h, R \in \mathbb{R},\ R > 0$ beliebig und $s : \mathbb{R} \to: \mathbb{R}^3,\ h(t) = (R\cos t, R\sin t, th)$ die Schraubenlinie mit Radius R und Ganghöhe h. Bestimmen Sie eine Formel für die Bogenlänge von $s|_{[t_0,t_1]}$, den Abschnit von s über $[t_0, t_1]$, für $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $t_0 \leq t_1$ beliebig.

Aufgabe 2.2
Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^2$ der Graph von f. Zeigen Sie über die Approximation mit Polygonzügen und mit Hilfe des gewöhnlichen (1-dimensionalen) Mittelwertsatzes, dass für die Bogenlänge von Γ_f die Formel gilt:

$$L[\Gamma_f] = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, \mathrm{d}t.$$

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen

Aufgabe 2.3 Sei I ein Intervall und seien $c, d : I \to \mathbb{R}^3$ (oder $\mathbb{R}^2$) parametrisierte Kurven und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass dann gilt:

a) $c \pm d)^{\cdot} = \dot{c} \pm \dot{d}$

b) $(fc)^{\cdot} = \dot{f}c + f\dot{c}$

c) $\langle c, d\rangle^{\cdot} = \langle \dot{c}, d\rangle + \langle c, \dot{d}\rangle$

d) $(c \times d)^{\cdot} = \dot{c} \times d + c \times \dot{d}$

Aufgabe 2.4 Zeigen Sie, dass die folgende Funktion überall differenzierbar aber nicht rektifizierbar ist:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 2.5

a) Bestimmen Sie $\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t$

b) Bestimmen Sie die Parametrisierung nach der Bogenlänge von

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ c(t) = \left(t, \sqrt{1 - t^2}\right).$$

Aufgabe 2.6 Bestimmen Sie die Bogenlänge für Abschnitte von

- der Hyperbelhelix $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $h(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$,
- der Parabel $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $p(t) = (t, t^2)$.