Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. A. Fauck

Kurven und Flächen
WiSe 2017/18

Übungsblatt 3

Schriftliche Abgabe: Mittwoch 8. November 2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 3.1

a) Berechnen Sie den Mittelpunkt des Krümmungskreises für einen beliebigen Punkt auf der Parabel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$.

b) Zeichnen Sie die Parabel und den Krümmungskreis zum Punkt $(0, 0)$.

Aufgabe 3.2

a) Untersuchen Sie für beliebige $r, R > 0$, ob die Epizykloide (siehe unten) eine regulär parametrisierte Kurve ist.

b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Epizykloide für $r = R = 1$. (Hinweis: Nutzen Sie die Additionstheoreme um das Integral in der Form $\int \sqrt{1 - \cos t}\, dt$ zu schreiben.)

c) Zeichnen Sie die Epizykloide für $R = 1$ und $r = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen

Aufgabe 3.3 Berechnen Sie die Krümmung in den Scheitelpunkten der Ellipse $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$. Bestimmen Sie die zugehörigen Krümmungskreise.

Aufgabe 3.4 Sei auf einem Kreis k vom Radius $r > 0$ ein Punkt P fixiert. Die Bahn, die P beschreibt wenn k auf einer Geraden abrollt, heißt Zykloide. Wenn k auf einem anderen Kreis K mit Radius $R > 0$ abrollt, so heißt diese Bahn Epizykloide.

a) Bestimmen Sie Parametrisierungen für die Zykloide und Epizykloide.

b) Bestimmen Sie die Länge der Zykloide nach einer vollständigen Umdrehung von k.

c) Berechnen Sie die Krümmung in jedem (sinnvollen) Punkt der Zykloide.

Aufgabe 3.5 Betrachten Sie die Drehungen

$$A = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $A \circ B$ wieder eine Drehung ist. Um welchen Winkel wird gedreht?

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}^2$ und seien $E_a(P) = A \cdot P + a$, $E_b(P) = A \cdot P + b$ zwei eigentliche euklidische Bewegungen. Zeige Sie dass $E_1 \circ E_2$ auch eine eigentliche euklidische Bewegung ist.