Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. A. Fauck

Kurven und Flächen

WiSe 2017/18

Übungsblatt 5

Schriftliche Abgabe: Mittwoch 22. November 2017, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 5.1 Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Bestimmen Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, dass die begleitende Schraubenlinie c in t_0 von 3. Ordnung berührt. (Hinweis: Vergleichen Sie $\dddot{s}(t_0)$ und $\dddot{c}(t_0)$.)

Aufgabe 5.2 Es sei $g : I \to \mathbb{R}^2,\ g(t) = (g_x(t), g_y(t))$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Krümmung k_g. Ferner sei $h \in \mathbb{R}$ beliebig und $\mu = \sqrt{1+h^2}$. Wir betrachten die Kurve

$$c : I \to \mathbb{R}^3,\ c(t) = \Big(g\big(t/\mu\big), h/\mu \cdot t\Big) = \Big(g_x\big(t/\mu\big), g_y\big(t/\mu\big), h/\mu \cdot t\Big).$$

a) Bestimmen Sie die Krümmung und Torsion von c in Abhängigkeit von h und k_g.

b) Zeigen Sie, dass c eine Böschungslinie ist.

c) Begründen Sie, dass bis auf Drehung und Verschiebung alle Böschungslinien von dieser Form sind.

(Hinweis: Sie können b) und c) auch ohne a) lösen.)

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen

Aufgabe 5.3 (Archimedische Spirale) Die Archimedische Spirale ist für $a > 0$ die folgende regulär parametrisierte Kurve:

$$c : [0, \infty] \to \mathbb{R}^2,\ c(t) = at\cos(t) + at\sin(t).$$

Zeigen Sie, dass der Abstand zwischen 2 Spiralumläufen immer konstant ist und berechnen Sie die Krümmung von c.

Aufgabe 5.4 (Hyperbolische Spirale) Die Inversion am Kreis der Archimedischen Spirale liefert die hyperbolische Spirale

$$h : (0, \infty] \to \mathbb{R}^2,\ h(t) = \Big(\frac{1}{at}\cos(t), \frac{1}{at}\sin(t)\Big).$$

Untersuchen Sie das Grenzverhalten von $h(t)$ für $t \to \infty$ bzw. für $t \to 0$.

Aufgabe 5.5 (Logarithmische Spirale) Sei wieder $a > 0$ beliebig. Dann beschreibt die folgende regulär parametrisierte Kurve die logarithmische Spirale

$$l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ l(t) = \big(e^{at}\cos(t), e^{at}\sin(t)\big).$$

Zeigen Sie das der Winkel zwischen $l(t)$ und $\dot{l}(t)$ konstant ist. Berechnen Sie die Länge von l über dem Intervall $(-\infty, t_0]$ und bestimmen Sie die Krümmung von l.