HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
Dr. A. Fauck

Kurven und Flächen
WiSe 2017/18

Übungsblatt 6

Schriftliche Abgabe: Mittwoch 29. November 2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 6.1 Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei

$$\Gamma_f : G \to \mathbb{R}^3,\ \Gamma_f(u^1, u^2) = (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$$

der Funktionsgraph von f. Was müssen Sie von f wenigstens fordern, damit Γ_f ein parametrisiertes Flächenstück ist? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 6.2
Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen parametrisierte Flächenstücke sind.

a) $f : (0, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ f(u^1, u^2) = \big(\sin(u^1)\cos(u^2), \sin(u^1)\sin(u^2), -\cos(u^1)\big)$
(Parametrisierung der Sphäre ohne die Pole in Kugel- bzw. Polarkoordinaten)

b) $f : \{(x, y),\, |\, x^2 + y^2 < 1\} \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y) = \big(x, y, 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\big)$
(Parametrisierung der oberen Halbsphäre durch Vertikalprojektion)

Aufgabe 6.3*
Zeigen Sie, dass für $r, R > 0$ beliebig die folgende Kurve $c : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ Böschungslinie in einer Sphäre ist. Welchen Radius hat diese Sphäre und auf welchem Breitenkreisen liegt $c(t)$ für $t \to 0$ bzw. $t \to 2\pi$?

$$c(t) = \left((R + r)\cos t - r\cos\frac{R + r}{r}t, (R + r)\sin t - \sin\frac{R + r}{r}t, 2\sqrt{r(R + r)}\cos\frac{Rt}{2r}\right).$$

Diese Aufgabe zeigt, dass die Projektionen der Böschungslinien auf Sphären in die xy-Ebene Epizykloiden sind.

Die mit * gekennzeichnete Aufgabe ist freiwillig und etwas aufwendiger.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen

Aufgabe 6.4 Bestimmen Sie eine reguläre Parametrisierung des Kegels (ohne Spitze) mit Öffnungswinkel α als Drehfläche um die z-Achse.

Aufgabe 6.5 Bestimmen Sie die Parametrisierung einer Böschungslinie auf dem Kegel.

Aufgabe 6.6 Bestimmen Sie eine reguläre Parametrisierung des Torus zu $R > r > 0$ als Drehfläche.

Aufgabe 6.7 Bestimmen Sie eine reguläre Parametrisierung des hyperbolischen Paraboloids.