



Übungsblatt 7

Schriftliche Abgabe: Mittwoch 6. Dezember 2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 7.1

- Berechnen Sie die Normalen zu folgenden parametrisierten Flächenstücken: Den Graph Γ_f eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, der Parametrisierung der Sphäre in Polarkoordinaten.
- Fertigen Sie für den Fall der Sphäre eine Skizze an, die das Verhalten in der xz -Ebene darstellt. (D.h. schneiden Sie die Sphäre mit der xz -Ebene und tragen Sie für einen Punkte die Normale ein.)

Aufgabe 7.2

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein regulär parametrisiertes Flächenstück. Zeigen Sie, dass man die Tangentialebene an f in $(u_0^1, u_0^2) \in G$ auch wie folgt charakterisieren kann

$$T_{(u_0^1, u_0^2)} f = \left\{ \dot{c}(t_0) \mid c(t) = f(u^1(t), u^2(t)), (u^1(t_0), u^2(t_0)) = (u_0^1, u_0^2) \right\}.$$

D.h. die Tangentialebene besteht aus allen Tangentialvektoren von allen Flächenkurven c in f durch $f(u_0^1, u_0^2)$. (Hinweis: Betrachten Sie für die eine Mengeninklusion Kurven der Form $c(t) = f(u_0^1 + a(t - t_0), u_0^2 + b(t - t_0))$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$.)

Aufgabe 7.3* Betrachten Sie die Abbildung $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, c(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-1/t^2}) & t > 0 \\ (t, e^{-1/t^2}, 0) & t < 0 \\ (0, 0, 0) & t = 0 \end{cases}$.

- Beweisen Sie, dass c eine differenzierbare Kurve ist. (Einmal differenzierbar reicht, aber man kann sogar zeigen, dass c beliebig oft differenzierbar ist.)
- Beweisen Sie, dass $\dot{c}(t) \neq 0$ für alle t gilt und dass die Krümmung $k(t) \neq 0$ außer für $t = 0$ und $t = \sqrt{2/3}$.
- Zeigen Sie, dass die Torsion $\tau(t) = 0$ für alle $t \neq 0, \pm\sqrt{2/3}$ (in diesen t ist τ nicht definiert!), obwohl die Kurve nicht eben ist.

Die mit * gekennzeichnete Aufgabe ist freiwillig und etwas aufwendiger.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen

Aufgabe 7.4 Bestimmen Sie die beiden Parameterdarstellungen als Regelfläche für den allgemeinen einschaligen Hyperboloid.

Aufgabe 7.5 Bestimmen Sie die Parametertransformation für den Wechsel von der Parametrisierung der Kugel durch Polarkoordinaten hin zur Parametrisierung durch Vertikalprojektion

Aufgabe 7.6 Berechnen Sie die Normale an den Torus gegeben als Drehfläche.

Aufgabe 7.7 Leiten Sie die Funktion $x \mapsto x^x$ ab.