



Übungsblatt 9

Schriftliche Abgabe: Mittwoch 20. Dezember 2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 9.1 Eine von einer regulär parametrisierten Kurve $P : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit Krümmung $k(t) \neq 0$ und $r > 0$ erzeugte Röhrenfläche lässt sich auch wie folgt parametrisieren:

$$R(u^1, u^2) = P(u^1) + r \cos(u^2) \left(\cos f(u^1) \cdot n(u^1) + \sin f(u^1) \cdot b(u^1) \right) \\ + r \sin(u^2) \left(-\sin f(u^1) \cdot n(u^1) + \cos f(u^1) \cdot b(u^1) \right).$$

Dabei ist für $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige, stetig differenzierbare Funktion wählbar. Finden Sie eine möglichst einfache Bedingung an f , damit die u^1 - und u^2 -Linien dieser Parametrisierung ein orthogonales Netz bilden.

Aufgabe 9.2

Berechnen Sie die metrischen Fundamentalgrößen g_{ik} und $\det(g_{ik})$ für die in der Vorlesung angegebenen Parametrisierungen der Zylinder-, Kegel- und Tangentenflächen für den Fall, dass P nach der Bogenlänge parametrisiert ist und für den Richtungsvektor der Geraden gilt $\langle a(u^1), a(u^1) \rangle = 1$ für alle u^1 . (Hinweis: Leiten Sie die Bedingung an a einmal nach u^1 ab.)

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen

Aufgabe 9.3 Zeigen Sie für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ die folgende Identität:

$$(a \times b) \times c = -\langle b, c \rangle \cdot a + \langle a, c \rangle \cdot b.$$

Aufgabe 9.4 Berechnen Sie die metrischen Fundamentalgrößen der folgenden regulär parametrisierten Flächenstücke:

- Ebene in affinen Koordinaten: Seien $X, Y \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig, $P \in \mathbb{R}^3$ beliebig und $E(u^1, u^2) = P + u^1 X + u^2 Y$.
- xy -Ebene (ohne 0) in Polarkoordinaten: $f(u^1, u^2) = (u^1 \cos u^2, u^1 \sin u^2, 0)$, $u^1 > 0$.
- Funktionsgraph: $\Gamma_f(u^1, u^2) = (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$
- Kugel in Kugelkoordinaten: $K(u^1, u^2) = (R \sin u^1 \cos u^2, R \sin u^1 \sin u^2, -R \cos u^1)$, $-\pi/2 < u^1 < \pi/2$.
- Halbkugel in Zylinderkoordinaten: $H(u^1, u^2) = (u^1 \cos u^2, u^1 \sin u^2, \sqrt{r^2 - (u^1)^2})$, $0 < u^1 < r$.

Aufgabe 9.5 Bestimmen Sie für die Halbkugeln in Zylinderkoordinaten den Winkel zwischen u^1 - und u^2 -Linien. (Schnittwinkel zwischen Meridianen und Breitenkreisen)