Übungsblatt 11

Analysis I WS 2015/2016

Abgabe: 14.1.2016

Aufgabe 1 (4+3+3 Punkte)

Beweisen Sie durch direkte Anwendung der ε - δ -Definition, dass die folgend definierten Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; h : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ in allen Punkten ihres Definitionsbereiches stetig sind:

a) $f(x) = ax + b$

b) $g(x) = x^2$

c) $h(x) = \frac{1}{x}$.

Aufgabe 2 (4 + 3 + 3 Punkte)

Finden Sie alle Punkte, an denen die folgenden Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unstetig sind:

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \leq 2 \\ 4 - x & \text{für } x \in (2, 5) \\ x - 6 & \text{für } x > 5 \\ 0 & \text{für } x = 5 \end{cases}$

b) $g(x) = (x - 1) \cdot \operatorname{sgn}(x^2 - 1)$, wobei $\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0 \\ \frac{t}{|t|} & \text{für } t \neq 0 \end{cases}$.

c) $h(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{\frac{1}{|x|} + 1} - \sqrt{\frac{1}{|x|}} \right) & \text{für } x \neq 0 \\ x = \frac{1}{2} & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgende Funktion genau für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{Z}, q > 0 \text{ und } \operatorname{ggT}(p, q) = 1. \end{cases}$$

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 5.01-8.1. besprochen werden:

Aufgabe 4

Bestimmen Sie für welche x die folgender Maßen definierte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Aufgabe 5

- a) Es seien f und g Funktionen, die im Punkte a stetig sind und $f(a) > g(a)$. Zeigen Sie: Es existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $f(x) > g(x)$ für alle $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.
- b) Es seien f und g stetige Funktionen mit Definitionsbereich $[a, b]$ (für f) und $[b, c]$ (für g). Definiere h auf $[a, c]$ durch $h|_{[a,b]} = f$ und $h|_{(b,c]} = g$. Zeigen Sie, dass h genau dann stetig ist, wenn $f(b) = g(b)$.

Aufgabe 6

An welchen Stellen lassen sich die folgenden Funktionen f und g stetig fortsetzen:

- $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{(x+1)(x-2)}$
- $g(x) = \frac{x-2}{(x-1)(x+1)} - \frac{9}{2(x-2)(x+1)}$

Aufgabe 7

- Es seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Abbildungen. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktionen $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ stetig sind, wobei

$$\max\{f, g\}(x) := \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{und} \quad \min\{f, g\}(x) := \min\{f(x), g(x)\}.$$

- Es sei $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, sodass $f_n(x) \leq 1$ für alle n und x . Ist dann auch die Funktion $\sup\{f_n\}$ definiert durch $\sup\{f_n\}(x) := \sup\{f_n(x)\}$ stetig?