Übungsblatt 12

Analysis I* WS 2015/2016

Abgabe: 21.1.2016

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

(1) Wir betrachte die Wurzelfunktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

Zeigen Sie, dass f nicht Lipschitz-stetig ist, aber dass für jedes $c > 0$ die Einschränkung $f|_{[c, \infty)}$ Lipschitz-stetig ist.

(2) Sei $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ für $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x + iy) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^8}} & \text{für } x + iy \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x + iy = 0. \end{cases}$$

Begründen Sie, warum g stetig in allen $z \neq 0$ ist. Zeigen Sie dass die Einschränkung von g auf jede (reelle) Gerade durch 0 stetig ist. Beweisen Sie, dass g nicht stetig in 0 ist, indem Sie mit Folgen-Stetigkeit argumentieren.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)

(1) Zeigen Sie: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und es existiert ein $c \in (a, b)$ mit $(f(a) - f(c))(f(b) - f(c)) > 0$, so ist f nicht injektiv.

(2) Beweisen Sie: eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann injektiv, wenn sie streng monoton wachsend oder fallend ist.

Aufgabe 3 (5+4+1Punkte)

(1) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$. Beweisen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-x)}$$

absolut und gleichmäßig konvergiert auf $[a, b] \setminus \mathbb{N}$.

(2) Zeigen Sie, dass diese Reihe absolut aber nicht gleichmäßig konvergiert auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

(3) Definiert die Reihe eine stetige Funktion auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$?

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 12.01-15.1. besprochen werden:

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ für $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x + iy) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^4 + y^4}} & \text{für } x + iy \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x + iy = 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Punkte $z \in \mathbb{C}$ in denen f nicht stetig ist.

Aufgabe 5

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ wird *gleichmäßig stetig* genannt, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ ist.

- (1) Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion gleichmäßig stetig ist.
- (2) Weisen Sie nach, dass $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 6

- (1) Zeigen Sie: ist $f : [a, a+2r] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(a+2r)$, dann existiert ein $x \in [a, a+r] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = f(x+r)$.
- (2) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $(f(a) - a)(f(b) - b) < 0$, dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = c$.

Aufgabe 7

- (1) Begründen Sie, dass die Funktion $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, die durch die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

gegeben ist, stetig ist.

- (2) Zeigen Sie, dass die Potenzreihe nicht gleichmäßig gegen f konvergiert.
- (3) Wie sieht es mit der Potenzreihe

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

aus?