Übungsblatt 13

Analysis I* WS 2015/2016

Abgabe: 28.1.2016

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n .$$

Aufgabe 2 (5+5)
(1) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass die folgende Reihe konvergiert.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^\alpha}.$$

(2) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die folgende Gleichung erfüllen

$$2^{(3^x)} = 3^{(4^x)}$$

Aufgabe 3 (4+3+3)
(1) Beweisen Sie folgende zwei Identitäten für $z \in \mathbb{C}$:

$$\sin(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$
$$\cos(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

(2) Beweisen Sie die Additionstheoreme: Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

(3) Zeigen Sie, dass die Funktion $sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ bijektiv ist, indem Sie deren Umkehrfunktion bestimmen.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 19.1–22.1 besprochen werden:

Aufgabe 4
Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$$

gegeben ist, auf Konvergenz.

Aufgabe 5
(1) Konvergiert die folgende Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^2} \quad ?$$

(2) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}_+$, die folgende Gleichung erfüllen

$$2(\log_5 x)^2 + \log_5(x^3) = 2.$$

Aufgabe 6
Für diese Aufgabe sollen die Additionstheoreme verwendet werden. Weisen Sie folgende Identitäten für $x, y \in \mathbb{C}$ nach:

(1) $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$,
(2) Wie üblich sei $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Dann ist

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$

Aufgabe 7
Es sei f eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte nicht abbrechende Potenzreihe (d.h. kein Polynom). Zeigen Sie, dass f nicht gleichmäßig auf $[0, \infty)$ konvergieren kann.