Übungsblatt 2

Analysis I WS 2015/2016

Abgabe: 29.10.2015

Aufgabe 1

a) Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und seien $A_1, A_2 \subseteq X$ sowie $B_1, B_2 \subseteq Y$ Teilmengen. Zeigen Sie, die folgenden Identitäten:

i) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

ii) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

Geben Sie ein Beispiel an, so dass $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ ist.

Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ für alle Teilmengen $A_1, A_2 \subseteq X$ gilt.

b) Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ zwei Abbildungen. Zeigen Sie:

i) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

ii) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

iii) Geben sie ein Beispiel für f und g an, für das $g \circ f$ bijektiv ist, aber f nicht surjektiv und g nicht injektiv ist.

Aufgabe 2

Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion:

(i) $\prod_{k=2}^n \frac{k^2}{k^2-1} = \frac{2n}{n+1}$ für jedes $n \geq 2$.

(ii) $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ für jedes $n \geq 1$.

(iii) Auf welche Ziffer endet 3^n für eine gegebene natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ in der Dezimaldarstellung? Finden Sie eine Gestzmäßigkeit und beweisen Sie diese mithilfe der vollständigen Induktion! Bestimmen Sie die letzte Ziffer von $3^{(5^{1000})}$ in der Dezimaldarstellung.

Aufgabe 3

In der Ebene seien n ($n \in \mathbb{N}$) verschiedene Geraden gegeben. In wieviele Teilstücken können diese Geraden die Ebene maximal zerteilen? Argumentieren Sie mithilfe der vollständigen Induktion.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 20.10-23.10 besprochen werden:

- a) Welche der beiden Abbildungen $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, (m, n) \mapsto m + n$ und $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (m, n) \mapsto m + n$ sind injektiv bzw. surjektiv?
- b) Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und seien $A_1, A_2 \subseteq X$ sowie $B_1, B_2 \subseteq Y$ Teilmengen. Zeigen Sie, die folgenden Identitäten:
- i) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
 - ii) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- c) Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ zwei Abbildungen. Zeigen Sie:
- i) Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.
 - ii) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.
- d) Benutzen Sie die vollständigen Induktion:
- i) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
 - ii) Beweisen Sie: Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn auch die Quersumme Ihrer Dezimaldarstellung durch 9 teilbar ist.
 - iii) Finden Sie eine ähnliche Regel zur Teilbarkeit durch 11 für die Dezimaldarstellung natürlicher Zahlen und beweisen Sie diese.
- e) Zeigen Sie mithilfe der vollständigen Induktion, dass die Anzahl derjenigen Teilmengen einer Menge mit $n > 0$ Elementen, die eine gerade Anzahl von Elementen haben, übereinstimmt mit der Anzahl derjenigen Teilmengen, die eine ungerade Anzahl von Elementen enthalten und dass beide Zahlen gleich 2^{n-1} sind.