
Übungsblatt 5

Analysis I* WS 2015/2016

Abgabe: 19.11.2015

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

Seien $A_1, A_2, \dots$ abzählbar unendliche Mengen. Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen abzählbar unendlich sind und begründen Sie Ihre Entscheidung:

- a) $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$
- b) $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \{x \mid \exists j \in \mathbb{N} : x \in A_j\}$

Aufgabe 2 (4+6 Punkte)

Zwei Mengen X, Y heißen gleichmächtig, wenn eine bijektive Abbildung $f: X \rightarrow Y$ existiert. Zeigen Sie:

- a) Sei M eine unendliche Menge. Dann existiert eine abzählbar unendliche Menge $M_0 \subseteq M$, sodass M und $M \setminus M_0$ gleichmächtig sind.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass jede unendliche Menge eine abzählbar unendliche Teilmenge hat.

- b) $(-1, 1)$ und $\mathbb{R}$ sind gleichmächtig.

Aufgabe 3 (6+4 Punkte)

- a) Bestimmen Sie die Polarform der folgenden komplexen Zahlen:

$$z = \frac{3i}{\frac{1}{\sqrt{3}} + i}, \quad w = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{10}, \quad u = \frac{1-i}{1+i}$$

- b) Stellen Sie die folgenden Mengen in der Gaußschen Zahlenabene dar:

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = |z + i|\}$$
$$M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = |z|^2\}$$

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 10.-13.11. und der Vorlesung vom 13.11. besprochen werden. Beschäftigen Sie sich mit diesen vor der Übung.

Aufgabe Ü1

- a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ abzählbar unendlich ist.
- b) Zeigen Sie, dass die Menge der geraden Zahlen abzählbar unendlich ist.
- c) Zeigen Sie: Sind A und B abzählbar unendlich, so auch $A \cup B$.

Aufgabe Ü2

Zeigen Sie, dass

- a) $(0, 1)$ und (a, b) gleichmächtig sind für beliebige $a, b \in \mathbb{R} : a < b$.
- b) $\mathbb{R}^+$ und $\mathbb{R}$ gleichmächtig sind.

Aufgabe Ü3

Zeigen Sie, dass eine Menge X und ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ nie gleichmächtig sind.

Aufgabe Ü4

Entscheiden Sie, ob die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$

$$\mathcal{E}(\mathbb{N}) = \{ A \subset \mathbb{N} \mid A \text{ ist endlich} \}$$

abzählbar unendlich ist (mit Beweis).

Aufgabe Ü5

- a) Bestimmen Sie die Polarform der folgenden komplexen Zahlen:

$$z = \frac{5}{3-i}, \quad w = (1+i)^7$$

- b) Stellen Sie die folgenden Mengen in der Gaußschen Zahlenabene dar:

$$M_1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = |z-2| \}$$

$$M_2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-3+i| < 2 \}$$