Übungsblatt 7

Analysis I* WS 2015/2016

Abgabe: 3.12.2015

Aufgabe 1 [5+5]

(1) Zeigen Sie: Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn die drei Teilfolgen

$$(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}, (a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}, (a_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergieren. Hinweis: Es wird nicht gefordert, dass die drei Teilfolgen denselben Grenzwert besitzen. Das muss gezeigt werden.

(2) Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ mit $x > 0$ und $s \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^s = x^s.$$

Hinweise: (i) $s = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ und $x^s = (\sqrt[q]{x})^p$.

(ii) Das ist die sogenannte "Folgenstetigkeit" von $f(x) = x^s$. Diese soll hier bewiesen und **nicht** benutzt werden.

Aufgabe 2 [4+3+3]

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = x.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = x.$$

Bestimmen Sie den Grenzwert der Folgen:

1. $x_n := \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

2. $y_n := \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+n)}$

Hinweis: Sie dürfen den ersten Teil der Aufgabe benutzen, auch wenn Sie diesen nicht selbst lösen konnten.

Aufgabe 3 [2+2+6]

a) Entscheiden Sie ob die folgenden rekursiv definierten Folgen konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte. Dabei sei $x_1 > 1$ gegeben:

1. $x_{n+1} := \frac{x_n}{1+x_n}$

2. $x_{n+1} := \frac{1}{x_n}$

b) Seien x_1 und c positive reelle Zahlen und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei die folgende rekursiv definierte Folge:

$$x_{n+1} := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{c}{x_n} \right)$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{c}$ konvergiert.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 24.11-27.11 besprochen werden:

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie: Hat jede Teilfolge $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge die gegen $a \in \mathbb{C}$ konvergiert, dann konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a .
- Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen mit Grenzwert $a \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge der arithmetischen Mittel von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, d.h.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = a.$$

Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen:

- a) $x_n := \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}$
 b) $y_n := \frac{x + \sqrt{x} + \dots + \sqrt[n]{x}}{n}$ für $x \in \mathbb{R}_+$

- Sei $c > 1$ und $x_1 = 1$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei die folgende rekursiv definierte Folge:

$$x_{n+1} := \sqrt{c \cdot x_n}$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen c konvergiert.

Die Lösungen folgender Aufgaben werden voraussichtlich am Freitag, den 28.11. erläutert:

- Sei $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Folge $\left(1 + \frac{x}{n}\right)_{n \geq N}$ monoton wachsend ist. Finden Sie eine obere Schranke dafür. Hinweis: Betrachten Sie $\left(1 + \frac{x}{kn}\right)_{kn \geq N}$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{N}$. Was folgt für die Konvergenz?

- Bezeichne mit $\exp(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Zeigen Sie, dass $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$.

- Zeigen Sie, dass für $s \in \mathbb{Q}$

$$\exp(s) = e^s.$$

- Betrachte $(a_{mn})_{m,n \in \mathbb{N}}$, d.h. eine sogenannte Doppelfolge. Man zeige

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \sup_{n \in \mathbb{N}} a_{mn} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m \in \mathbb{N}} a_{mn}.$$

Hierbei sei daran erinnert, dass $\sup M = \infty$, falls M nach oben unbeschränkt.

- Man zeige: Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ folgt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(a_n) = \exp(x)$