
Übungsblatt 8

Analysis I* WS 2015/2016

(Abgabe: 10.12.2015)

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

a) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen, sodass jedes b_m ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Sei nun b ein Häufungspunkt von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Beweisen sie, dass b nun auch ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

b) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen und es gelte $a_m \leq b_m$ für alle m . Beweisen Sie, dass gilt:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (1)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (2)$$

Konstruieren Sie nun zwei Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für die $a_n < b_n$ gilt, aber nicht $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n < \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass aus dem Cauchy-Kriterium für $\mathbb{R}$ die Supremumseigenschaft folgt.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)

a) Untersuchen Sie die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 2n}$$

auf Konvergenz und bestimmen sie ggf. den Grenzwert.

b) Begründen Sie, dass die folgende Reihe konvergiert und berechnen Sie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Hinweis: Das ist eine sogenannte Teleskop-Reihe. Finden Sie eine explizite Darstellung für die Partialsummen und beweisen Sie diese.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 01.12.-04.12. besprochen werden:

- Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge, für die $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ eine reelle Zahl ist. Zeigen Sie, dass dies dann ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Zeigen Sie weiter, dass dies der größte Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Überlegen Sie sich die entsprechende Aussage für $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ mithilfe der Beziehungen zwischen Supremum und Infimum für eine Menge A und $-A = \{-a \mid a \in A\}$.
- Zeigen Sie: Eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen besitzt keinen Häufungspunkt, genau dann, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

- Ist $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit

$$|x_n - x_{n+1}| \leq 2^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

so ist $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent.

- Sei

$$I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \dots$$

eine Folge von abgeschlossenen Intervallen in $\mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(I_n) = 0.$$

$\mathbb{R}$ erfüllt das **Intervallschachtelungsprinzip**, d.h. es existiert genau ein $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass das Intervallschachtelungsprinzip äquivalent zur Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$ ist.

- Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.
- Berechnen Sie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$. Hinweis: Zeigen Sie, dass gilt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right).$$