Übungsblatt 9

Analysis I* WS 2015/2016

(Abgabe: 17.12.2015)

Aufgabe 1 (6+4 Punkte)

(i) Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{(-n)^{n+1}}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ auf Konvergenz. Welche dieser Reihen konvergieren absolut? Begründen Sie!

(ii) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$ für jedes $q \in (-1, 1)$ konvergent ist und berechnen Sie ihren Grenzwert. *Hinweis:* Betrachten Sie die Partialsummen der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} ((1-q) \cdot nq^{n-1})$.

Aufgabe 2 (6+4 Punkte)

(i) Untersuchen Sie auf Konvergenz: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2})$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3-2n^2+1}$.

(ii) Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ drei reelle Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle n . Zeigen Sie: Falls die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut konvergieren, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie:

(i) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergent ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Summen

$$\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} a_n, k \in \mathbb{N}.$$

(ii) Falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist, dann ist $(n \cdot a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Hinweis: Benutzen Sie das Cauchy-Kriterium für die Konvergenz einer Folge.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 08.12-11.12 besprochen werden:

1. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=nk}^{(n+1)k-1} a_j \right)$ konvergiert.

Gilt die obige Aussage, wenn man 'konvergiert' überall durch 'absolut konvergiert' ersetzt?

2. Untersuchen Sie auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n n!}{(n+1)!}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$.

3. Sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Zeigen Sie: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe, dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergent. Stimmt diese letztere Aussage noch, wenn man 'absolut konvergent' durch 'konvergent' ersetzt?
4. Bestimmen Sie alle $z \in \{\pm 1, \pm i\}$, so dass die komplexe Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konvergent ist.