Knobelblatt

Analysis I* WS 2015/2016

Viel Spaß!

Aufgabe 1
Sie wissen aus der Vorlesung, dass die harmonische Reihe divergiert. Wie sieht es aus, wenn ich jeden Summanden $\frac{1}{n}$ aus der Summe streiche, für den die natürliche Zahl die Ziffer 9 in der Dezimaldarstellung enthält?

Aufgabe 2
Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine bedingt konvergente Reihe. Zeigen Sie, dass man daraus durch Umordnung zu jedem abgeschlossenen Intervall $[a,b], -\infty \leq a \leq b \leq \infty$ bzw. $(-\infty, b]$ bzw. $[a, \infty)$ eine Reihe erhalten kann, deren Häufungspunkte genau $[a,b]$ sind. Hinweis: Zeigen Sie, dass die Menge der Häufungspunkte so einer umgeordneten Reihe immer eine der drei Formen annimmt.

Aufgabe 3
Die Konvergenz unendlicher Produkte wird ähnlich wie für Reihen über die Konvergenz der "Partialprodukte" definiert.
(1) Beweisen Sie folgende Identität für $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$:

$$(1+z^{-1}+z^{-1}+...+z^{-9})(1+z^{-10}+z^{-20}+...+z^{-90})(1+z^{-100}+z^{-200}+...+z^{-900})\cdot ... = \frac{1}{1-z}$$

(2) Sei $(p_k)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Primzahlen. Beweisen Sie, dass für $s \in \mathbb{Q}$, $s > 1$ die folgende Behauptung gilt:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

(3) Sei eine Folge $(a_n)_n$ reeler Zahlen mit $0 < a_n < 1$ gegeben, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n) > 0$$

ist.
(4) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty.$$

Aufgabe 4
(1) Sei $x \notin \mathbb{Q}$. Zeigen Sie: Für jedes Paar a, b reeller Zahlen mit $0 \leq a < b \leq 1$ gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$nx - \lfloor nx \rfloor \in (a,b).$$

$\lfloor x \rfloor$ ist die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist und (a,b) ist das offene Intervall.
(2) Sei $x > 0$. Beweisen Sie die folgende Aussage über Mengen:

$$\{\lfloor nx \rfloor + n; \lfloor \frac{n}{x} \rfloor + n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$$

genau dann, wenn x irrational ist.
Zeigen Sie, dass dann jedes der Elemente genau einmal aufgezählt wird.

Bitte wenden...

Aufgabe 5

Eine formale Laurentreihe (mit endlichen Hauptteil) ist ein Ausdruck der Form $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n,\ a_n \in \mathbb{R}$, sodass es ein $N \in \mathbb{Z}$ gibt mit $a_n = 0$ für alle $n < N$. Mit diesem N kann man die Reihe auch als $\sum_{n\geq N} a_n t^n$ schreiben. Beachten Sie, dass hier Konvergenz keine Rolle spielt. Insbesondere ist t nur eine formale Variable. Zwei formale Laurentreihen sind gleich, wenn alle ihre Koeffizienten a_n gleich sind.

Die Summe zweier formaler Laurentreihen erfolgt gliedweise, d.h.

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n\right) + \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n t^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (a_n + b_n) t^n.$$

Das Produkt zweier formaler Laurentreihen ist das Cauchy-Produkt, d.h.

$$\left(\sum_{n\geq N} a_n t^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq M} b_n t^n\right) = \sum_{n\geq N+M} \left(\sum_{k=0}^{n-N+M} (a_{N+k} \cdot b_{n-N-k})\right) t^n.$$

Die formalen Laurentreihen lassen sich lexikographisch anordnen, d.h. für zwei formale Laurentreihen

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n < \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n t^n$$

genau dann, wenn es ein $K \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass, $a_K < b_K$ und $a_n = b_n$ für alle $n < K$.

Zeigen Sie, dass die formalen Laurentreihen einen angeordneten Körper bilden, der $\mathbb{R}$ enthält und in dem das archimedische Axiom nicht gilt. Was ist das multiplikative Inverse der Laurentreihe $1 + t$?