Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Klaus Mohnke
A. Fauck, Dr. V. Fromm, C. Stadtmüller

Analysis I*
Aufgaben zur Wiederholung - Lösungshinweise

Dies sind keine Musterlösungen, insbesondere ist der Lösungsweg nicht so ausformuliert, wie wir dies erwarten. Diese Hinweise sollen Ihnen helfen, Ihren Lösungen zu überpfüfen und ggf. Hinweise geben, wenn Sie eine Aufgabe nicht lösen können.

1 Vollständige Induktion

Aufgabe 1 Vollständige Induktion. Induktionsschritt:

$$\prod_{k=1}^{n+1}\left(1-\tfrac{1}{k+1}\right) \overset{IV}{=} \tfrac{1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{n+2}$$

Aufgabe 2 Ist der binomische Lehrsatz für $(1+(-1))^n$. Wir werden solche „Fallen“ nicht in der Klausur stellen. Die Aufgabe soll Sie aber trotzdem daran erinnern, kurz zu überlegen, ob Sie schon bekanntes anwenden können.

2 Reelle und komplexe Zahlen

Aufgabe 3 Dreiecksungleichung für $|a+b-b|$ bzw. $|b+a-a|$.

Aufgabe 4 $\inf M = 1$, kein Minimum, und M ist nach oben unbeschränkt.

Aufgabe 5 Es ist $f(z)=|z|^2\in\mathbb{R}$ und damit $f(\mathbb{C})=\mathbb{R}$. Insbesondere ist also f nicht surjektiv. Weiter ist f auch nicht injektiv, da z.B. $f(-1)=f(1)$. Da $|z|^2<1\Leftrightarrow|z|<1$, ist $f^{-1}(A)=\{z\in\mathbb{C}\mid\ |z|<1\}$, was einer Kreisscheibe um Null vom Radius eins (ohne ihren Rand) enstpricht.

3 Folgen

Aufgabe 6 Es ist

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=+\infty$$

Man kann zeigen, dass $c_n\geq 1$ (induktiv) und monoton fallend ($c_{n+1}-c_n\geq 0$ durch direkte Rechnung) ist. Damit ist sie konvergent.

Aufgabe 7 Induktiv folgt, dass $|x_n|>1$ (also insb. x_{n+1} wohldefiniert) und damit $|x_{n+1}|>|x_n|$. Damit ist die Folge $(|x_n|)$ konvergent. Mit dem üblichen Trick für rekursiv definierte Folgen folgert man $\lim_{n\to\infty}|x_n|=1$ und damit hat (x_n) die Häufungspunkte ±1.

4 Reihen

Aufgabe 8

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)^{(n^2)}}{2^n\cdot n^{(n^2)}}}=\frac{e}{2}$, also ist die Reihe nach dem Wurzelkriterium absolut konvergent

Die zweite Reihe konvergiert mit $|\sin n|\leq 1$ nach dem Majorantenkriterium absolut.

Aufgabe 9 Setze $w = z^2$, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{\sqrt{n}} w^n$ eine Potenzreihe. Deren Konvergenzradius ergibt sich aus

$$\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{\sqrt{n}}} = \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{1/\sqrt{n}} \to \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

zu $\hat{R} = 1$. Die eigentliche Reihe konvergiert also für $|z^2| < 1$, ihr Konvergenzradius ist also ebenfalls $R = 1$. Sie ist eine Potenzreihe (bei der jeder zweite Koeffizient null ist), wir können also die Ergebnisse der Vorlesung für diese anwenden: Die Reihe konvergiert für jedes $r \in (0, 1)$ gleichmäßig auf $K(0, r)$ und die Grenzfunktion ist stetig auf $K(0, 1)$.

5 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Aufgabe 10 In allen Punkten $z \neq 0$ ist die Funktion stetig nach den Rechenregeln. Weiter gilt

$$f(t + it) = \frac{t^3}{t^4 + t^2} = \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \to \infty \quad (t \to 0),$$

also ist f nicht stetig in 0.

Aufgabe 11 Betrachte $h = f - g$. Der Zwischenwertsatz liefert eine Nullstelle von h.

Aufgabe 12 Es ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ oder es ex. ein $f(x_0) > 0$. Die Grenzwertbedingungen liefern ein $M > 0$ sodass $f(x) < f(x_0)$ für alle $|x| > M$. Andererseits nimmt f auf $[-M, M]$ nach Weierstraß ein Maximum an.

6 Funktionenfolgen

Aufgabe 13 Die Folge (f_n) konvergiert punktweise gegen die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$. Da die Grenzfunktion unstetig ist, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein.

Die Folge (g_n) konvergeirt gleichmässig gegen die konstante Funktion $g = 1$. Sei $\varepsilon > 0$, dann ist

$$|g(x) - g_n(x)| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{x} > 1 - \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x > (1 - \varepsilon)^n.$$

Da $x \geq a$, genügt $a > (1 - \varepsilon)^n$, was für hinreichend große n erfüllt ist.

7 Differenzierbare Funktionen

Aufgabe 14 Die Funktion ist in allen $x \neq 0$ differenzierbar nach den Rechenregeln. In 0 ist sie nicht differenzierbar: Betrachten die Folge $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k2\pi}$. Dann ist

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \left(\frac{\pi}{2} + k2\pi\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi\right) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \to \infty.$$

Aufgabe 15 Angenommen, f hätte zwei Nullstellen, dann müsste nach dem Satz von Rolle eine Nullstelle der Ableitung dazischen liegen.

Aufgabe 16 Es ist $f'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = e^{-x}(2x - x^2)$. Also erhalten wir eine Nullstelle der Ableitung genau dann, wenn

$$e^{-x}(2x - x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(2 - x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 2.$$

Uns interessiert nur die Nullstelle $x = 0$. Offensichtlich ist f' stetig. Nach dem Zwischenwertsatz hat f' also auf $[-1, 0)$ und $(0, 1]$ jeweils konstantes Vorzeichen. Aus $f'(-1) = e(-2 + 1) < 0$, $f'(1) = \frac{1}{e}(2 - 1) > 0$ folgt also, dass f auf $[-1, 0)$ monoton fallend und auf $(0, 1]$ monton wachsend ist. Also hat f in 0 ein lokales Minimum und lokale Maxima in den Randpunkten $x = -1$ und $x = 1$.