Übungsblatt 1

Komplexe Analysis und dynamische Systeme
SS 2017
Übung am 22.4 und 27.4.

Aufgabe 1
Wir nennen eine Abbildung $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ komplex differenzierbar in $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ wenn Folgendes gilt: Sind $z_0, f(z_0) \in \mathbb{C}$, so gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ mit $f(U) \subset \mathbb{C}$ und $f|_U : U \to \mathbb{C}$ ist komplex differenzierbar in z_0. Ist $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f(z_0) = \infty$, so gibt es eine Umgebung $U \subset \mathbb{C}$, so dass $f(U) \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ und $\frac{1}{f|_U} : U \to \mathbb{C}$ (mit der üblichen Konvention $1/\infty = 0$ ist komplex differenzierbar in z_0. Ist $z_0 = \infty$ und $f(\infty) \in \mathbb{C}$, so gibt es eine Umgebung $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ von $0 \in \mathbb{C}$, so dass $g : U \to \mathbb{C}$ wobei $g(z) = f(\frac{1}{z})$ und g ist komplex differenzierbar in 0...
(i) Beschreiben Sie den verbliebenen Fall!
(ii) Zeigen Sie, dass jede rationale Funktion, d.h. unkürzbarer Quotient zweier komplexer Polynome durch geignete Fortsetzungen des Definitonsbereiches zu einer komplex differenzierbaren Abbildung $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ wird!
(iii) Zeigen Sie, dass sich die Exponentialfunktion $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ nicht zu einer Abbildung $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ fortsetzen lässt!
(iv) Zeigen Sie, dass jede komplex differenzierbare Funktion $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ der Form wie in (ii) beschrieben ist.

Aufgabe 2
Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Gl(2; \mathbb{C})$ eine invertierbare 2×2-Matrix.
(i) Begründen Sie, dass durch

$$\Phi_A(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

eine bijektive komplex-differenzierbare Abbildung $\Phi_A : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ definiert wird.
(ii) Zeigen Sie: Ist $B \in Gl(2; \mathbb{C})$ eine andere solche Matrix, so gilt

$$\Phi_{AB} = \Phi_A \circ \Phi_B.$$

Weitere Übungen dazu finden sich im Skript von Dietmar Salamon auf Seite 17 ff.

Aufgabe 3
(i) Zeigen Sie, dass jede holomorphe Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konform ist, d.h. für das euklidische Skalarprodukt $\langle ., . \rangle$ auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ gilt für alle $v, w \in \mathbb{C}$

$$\langle d_z f(v), f_z f(w) \rangle = \lambda^2(z) \langle v, w \rangle.$$

Erläutern Sie, wie dies als "f ist Winkel-erhaltend" interpretiert werden kann.
(ii) Eine zweimal differenzierbare Funktion $\varphi : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ heißt harmonisch, wenn

$$\Delta\varphi := \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass der Real- und Imaginärteil $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ einer holomorphen Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ harmonisch sind.

Bitte wenden...

(b) Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Zeigen Sie, dass u genau dann harmonisch ist, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x}$$

holomorph ist. Was folgt daraus für die Differenzierbarkeit harmonischer Funktionen?
(iii) Zeigen Sie, dass eine holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ auf einer zusammenhängenden, offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ für die
(a) $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$ oder
(b) $f(\Omega) \subset S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
gilt, konstant sind.