Übungsblatt 10

Komplexe Analysis und dynamische Systeme
SS 2017
Übung am 06.06.

Aufgabe 1
Sei $F = -\nabla U$ ein konservatives autonomes Kraftfeld mit einem Potential $U : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, das nur vom Abstand von 0 abhängt. Zeigen Sie, dass entlang jedee Lösung $x : I \to \mathbb{R}^3$ der Newtongleichung der Drehimpuls $M : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$M = x \times p$$

konstant ist. Was folgt daraus für x? Leiten Sie das 2. Keplersche Gesetz daraus ab.

Aufgabe 2
Eine beschränkte Lösung ist eine Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, die (für alle Zeiten) beschränkt bleibt. Zeigen Sie, dass für das Gravitationspotential $U(x) = -k/\|x\|$ alle beschränkten Lösungen periodisch sind ($k > 0$). Vervollständigen Sie insbesondere folgende Argumente der Vorlesung: $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend oder streng monoton fallend und unbeschränkt. Es gibt ein $T > 0$, so dass $\varphi(t+T) = \varphi(t) - 2\pi$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt auch $r(t+T) = r(t)$ und die Lösung ist ebenfalls periodisch: $x(t+T) = x(t)$. Bestimmen Sie T aus den gegebenen Daten (inklusive des Drehimpulses M) und leiten Sie das 3. Keplersche Gesetz ab.

Aufgabe 3
Rechnen Sie nach, dass die beschränkten Bahnen auf Ellipsen verlaufen, deren einer Brennpunkt 0 ist. Welche anderen Typen von Bahnen gibt es? Unter welchen Bedingungen wird jeder der Typen angenommen?

Aufgabe 4
Führen Sie die Diskussion von Aufgabe 2 und Aufgabe 3 mit dem Potential $U(\|x\|) = a\|x\|^2$ durch, wobei $a > 0$.