Übungsblatt 12

Komplexe Analysis und dynamische Systeme
SS 2017
Übung am 20.06.

Aufgabe 1
Bestimmen Sie die stationären Punkte der folgenden Vektorfelder in der Ebene und treffen Sie Aussagen über das Verhalten des Flusses in deren Nähe. Bestimmen Sie die Punkte, in denen das Feld parallel zur x– bzw. y-Achse ist (die sogenannten Null-Kliniken). Skizzieren Sie die Phasenporträts der Flüsse, so gut Sie es aus den Informationen können:

(a)

$$\dot{x} = x - xy$$
$$\dot{y} = y - x^2.$$

(b)

$$\dot{x} = -x^2 - y^2 + 1$$
$$\dot{y} = 2x.$$

Aufgabe 2
(a) Sei $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom 4. Grades mit zwei verschiedenen lokalen Minima und einem lokalen Maximum. Skizzieren Sie den typischen Graphen eines solchen Polynoms. Bestimmen Sie die stationären Punkte der zugehörigen Hamilton-Gleichung

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -U'(x).$$

und treffen Sie Aussagen über das Verhalten des Flusses in deren Nähe. Bestimmen Sie Energieniveaumengen und skizzieren Sie diejenigen, die stationäre Punkte enthalten und einige typische andere. Skizzieren Sie nun das Phasendiagramm.
(b) Studieren Sie die Newton-Gleichung $\ddot{x} = -\sin x - b\dot{x}$ des (nicht-linearen) Pendels mithilfe der zugehörigen Hamiltongleichung. Sei zunächst die Reibung $b = 0$. Verfahren Sie wie in (a). Zeigen Sie nun, dass die Energie entlang von Lösungen der Gleichung mit $b > 0$ strikt abnimmt und skizzieren Sie das Phasenporträt des Flusses. Erläutern Sie, welche Ihnen bekannte Aussagen Sie dabei benutzen. Interpretieren Sie die Flusslinien physikalisch.

Aufgabe 3
(a) Sei $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatt. Zeigen Sie, dass Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -\mathrm{grad} V(x(t))$$

immer senkrecht auf den Niveaumengen stehen, wo diese regulär sind, d.h. in $x \in \mathbb{R}^n$ mit Differential $d_x V \neq 0$. Zeigen Sie weiterhin, dass alle Eigenwerte der Linearisierung $d_x(\mathrm{grad} V)$ reell sind.
(b) Betrachten Sie das zur Hamilton-Gleichung in Aufgabe 2 (a) orthogonale System

$$\dot{y} = y$$
$$\dot{x} = U'(x).$$

Zeigen Sie, dass dies die Form eines Gradientenflusses wie in (a) hat. Skizzieren Sie das entsprechende Phasenporträt (mit einer anderen Farbe) in das Phasendiagramm aus Aufagbe 2 (a) und wiederholen Sie dies für Aufgabe 2 (b).