Übungsblatt 2

Komplexe Analysis und dynamische Systeme
SS 2017
Übung am 4.5.

Aufgabe 1
(i) Zeigen Sie, dass jede holomorphe Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konform ist, d.h. für das euklidische Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ gilt für alle $v, w \in \mathbb{C}$

$$\langle d_z f(v), f_z f(w) \rangle = \lambda^2(z) \langle v, w \rangle.$$

Erläutern Sie, wie dies als "Die Abbildung f ist Winkel-erhaltend" interpretiert werden kann.
(ii) Eine zweimal differenzierbare Funktion $\varphi : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ heißt harmonisch, wenn

$$\Delta\varphi := \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass der Real- und Imaginärteil $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ einer holomorphen Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ harmonisch sind.
(b) Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Zeigen Sie, dass u genau dann harmonisch ist, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}$$

holomorph ist. Was folgt daraus für die Differenzierbarkeit harmonischer Funktionen?

Aufgabe 2
(i) Zeigen Sie, dass mit

$$f(z) := \begin{cases} \frac{z}{e^z - 1} \text{ falls } z \neq 0 \\ 1 \text{ falls } z = 0 \end{cases}$$

eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ definiert wird und bestimmen Sie die ersten Koeffizienten der Taylorentwicklung in 0.
Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe. Zeigen Sie, dass alle Koeffizienten rational sind, alle ungeraden Koeffizienten verschwinden, alle durch 4 teilbaren positiv und alle anderen negativ sind. Der n-te Koeffizient multipiziert mit $n!$ wird n-te Bernoulli-Zahl genannt und mit B_n bezeichnet.
(ii) Zeigen Sie, dass die Taylorreihe von $\tanh(z)$ in 0 gegeben ist durch

$$\tanh(z) := \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k} - 1) b_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}.$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius.
(iii) Beweisen Sie die Formel für die Taylorentwicklung in 0:

$$\frac{z}{1 - z^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + ... = \sum_{k=1}^{\infty} k z^k$$

und bestimmen Sie den Konvergenzradius. Das ist die sogenannte **Koebe-Abbildung**.

Bitte wenden...

Aufgabe 3
(i) Sei $f : (X, d) \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetige Abbildung von einem metrischen Raum (X, d). Zeigen Sie, dass es für jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ und eine stetige Abbildung $h : U \to \mathbb{C}$ gibt, mit $h(x)^n = f(x)$ für alle $x \in X$. Begründen Sie, dass im Allgemeinen $U \neq X$ anhand eines Beispiels.
(ii) Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen die größten Kreisscheibe um 0, auf der diese injektiv ist: $f(z) = z + z^2$, $f(z) = e^z$, $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$.
(iii) Finden Sie eine explizite Formel für Φ nahe $z = 0$ mit $\Phi'(z) \neq 0$, so dass $\cos(z) = 1 + \Phi(z)^n$ nahe 0 ist.
(iv) Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph auf einer offenen Umgebung $\Omega \subset \mathbb{C}$ von 0 mit $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass es auf einer Umgebung der 0 eine holomorphe Funktion g gibt, so dass $f(z^n) = g(z)^n$.