Übungsblatt 3

Komplexe Analysis und dynamische Systeme
SS 2017
Übung am 11.5.

Aufgabe 1
(i) Zeigen Sie, dass für jedes $z_0 \in \Delta$ die Abbildung

$$T : z \mapsto \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}$$

ein Biholomorphismus der Einheitskreisscheibe Δ auf sich ist. Berechnen Sie das Inverse. Zeigen Sie, dass sie eine Einschränkung einer größere Kreisscheibe um 0
(ii) Für eine holomorphe Abbildung $f : \Delta \to \Delta$ betrachte $S \circ f \circ T^{-1} : \Delta \to \Delta$ wobei

$$S(w) := \frac{z - w_0}{1 - \overline{w}_0 w}.$$

Wenden Sie das Schwarz-Lemma auf diese Abbildung an. Beschreiben Sie die Ungleichung, die Sie über f erhalten.
(iii) Zeigen Sie, dass jede biholomorphe Abbildung $T : \Delta \to \Delta$ der Form

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}$$

für ein $z_0 \in \Delta$ und $\theta \in \mathbb{R}$ ist. Hinweis: Wenden Sie Ihr Ergebnis unter (ii) auf f und f^{-1} an und erläutern Sie, warum daraus Gleichheit für die Ungleichung folgt. Benutzen Sie dann die Aussage des Schwarz-Lemmas für diese Situation.
(iv) Zeigen Sie, dass durch

$$\Phi(z) := \mathrm{i}\frac{z+1}{z-1}$$

ein Biholomorphismus $\Phi : \Delta \to \mathbb{H}$ definiert wird. Spielen Sie nun das Spiel in (i)-(iii) mit holomorphen Abbildungen $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ und zeigen Sie, dass jeder Biholomorphismus $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ eine Möbiustransformation

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $ad - bc = 1$ ist.

Aufgabe 2
(i) Sei $f : \Delta \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit existierendem Grenzwert $\lim_{z \to 0} \mathrm{Re}(f(z)) = a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f in 0 hebbar ist.
(ii) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, so dass für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\sharp f^{-1}(z) \leq n$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f ein Polynom vom Grad nicht größer als n ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass 0 keine wesentliche Singularität von $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \to f(\frac{1}{z}) \in \mathbb{C}$ sein kann.
(iii) Jede injektive holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist ein Polynom vom Grad 1.
(iv) Sei $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung: (a) Zeigen Sie, dass das Urbild eines beliebigen Punktes endlich ist.
(b) Zeigen Sie, dass f eine rationale Funktion ist, d.h. der Quotient zweier komplexer teilerfremder Polynome.
(c) Zeigen Sie, dass jeder Biholomorphismus $T : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ eine Möbiustransfromation ist.