Übungsblatt 4

Komplexe Analysis und dynamische Systeme
SS 2017
Übung am 18.5.

Aufgabe 1
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, $z_* \in U$ und $(z_n)_n \subset U$ eine Folge, die gegen z_* konvergiert. Entscheiden Sie, ob es eine solche Folge und eine nicht-konstante holomorphe Funktion $f : U \backslash (\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_*\})$ geben kann, die
(i) in z_n hebbar ist, mit $\tilde{f}(z_n) = c$ für ein $c \in \mathbb{C}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$,
(ii) in z_n einen Pol hat für alle $n \in \mathbb{N}$,
(iii) in z_n eine wesentliche Singularität hat für alle $n \in \mathbb{N}$.
Falls es ein Beispiel gibt, ist dann die Art der Singularität in z_* beliebig? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort (gegebenfalls mit einem Beispiel).

Aufgabe 2
Sei $A(r; R) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < \|z\| < R\}$ der Kreisring um 0 mit $< r < R$. Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine Umgebung des Abschlusses $\overline{A}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei $z \in A$. (i) Zeigen Sie für die Kurvenintegrale im mathematisch positiven Umlaufsinn die Formel

$$f(z) = \int_{\partial\Delta(R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\partial\Delta(r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Hinweis: Betrachten Sie eine Kreisscheibe um z mit $\overline{\Delta(z;\rho)} \subset A$ und wenden Sie den Divergenzsatz an.
(ii) Zeigen Sie nun, dass

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

ist mit eindeutig bestimmten $a_n \in \mathbb{C}$ so dass

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{R}$$

sowie

$$\limsup_{n\to-\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < r$$

(iii) Begründen Sie, dass jede holomorphe Funktion $f : \Delta(z_0, R) \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ durch eine Laurentreihe gegeben ist, d.h.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

wobei

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{R}.$$

Bitte wenden...

Aufgabe 3
Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine einfach geschlossene, stückweise differenzierbare Kurve, d.h. $\gamma(0) = \gamma(1)$ und $\gamma|_{(0,1)}$ injektiv. Seien $\Omega_0 := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(\gamma) \mid \mathbf{w}(\gamma, z) = 0\}$ und $\Omega_1 := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(\gamma) \mid \mathbf{w}(\gamma, z) = 1\}$.
Zeigen sie:
(i) Ω_0 und Ω_1 sind offen in $\mathbb{C}$.
(ii) Ω_0 und Ω_1 sind zusammenhängend.
(iii) $\mathbb{C} = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \mathrm{im}(\gamma)$.
(iv) Ω_1 ist beschränkt und einfach zusammenhängend.

Aufgabe 4
Zeigen Sie: Zwei stückweise differenzierbare geschlossene Kurven $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$sind genau dann homotop in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, wenn ihre Windungszahlen um 0,

$$\mathbf{w}(\gamma_0, 0) = \mathbf{w}(\gamma_1, 0)$$

gleich sind. Die Homotopie ist dabei eine Homotopie von geschlossenen Kuren, d.h. es gibt eine stetige Abbildung

$$H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

mit $H(j,t) = \gamma_j(t)$ für $j = 0,1$ und alle $t \in [0,1]$ und $H(s,0) = H(s,1)$ für alle $s \in [0,1]$.