Übungsblatt 6

Komplexe Analysis und dynamische Systeme
SS 2017
Übung am 08.06.

Aufgabe 1
Übungsblatt 4, Aufgabe 2

Aufgabe 2
Sei γ_R der Zykel, der durch die Seiten des folgenden Rechtecks, die entgegen des Uhrzeigersinns orientiert sind, gegeben ist: die Eckpunkte sind gegeben durch $-R, R, R+\sqrt{\pi}\mathrm{i}, -R+\sqrt{\pi}\mathrm{i}$ für $R > \sqrt{\pi}$. Untersuchen Sie das Integral

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{1-e^{-\sqrt{\pi}(1+\mathrm{i})}} dz$$

mithilfe des Residuensatzes und leiten Sie mithilfe des Grenzwertes $R \to \infty$ die Formel für das (reelle) Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

her.

Aufgabe 3
(i) Zeigen Sie: Die Laurentreihe des Kotangens ist

$$\cot(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} B_{2k} z^{2k-1}.$$

Benutzen Sie diese Formel, um die ersten Bernoulli-Zahlen zu berechnen.
(ii) Sei γ_N der Zykel, der durch die Seiten des folgenden Rechtecks, die entgegen des Uhrzeigersinns orientiert sind, gegeben ist: die Eckpunkte sind gegeben durch die vier Punkte $\pm(N+\frac{1}{2})\pi(1 \pm \mathrm{i})$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben sind. Drücken Sie für $n \in \mathbb{N}$ das Integral

$$\int_{\gamma_N} \frac{1}{z^{2n}} \cot(z) dz$$

durch die Residuen der Funktion aus.
(iii) Zeigen Sie, dass das Integral für $N \to \infty$ gegen Null konvergiert. Was folgt daraus für die Summe über alle Residuen?