Übungsblatt 8

Komplexe Analysis und dynamische Systeme
SS 2017
Übung am 22.06.

Aufgabe 1
(i) Sei (X,d) ein metrischer Raum, $S \subset X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass der Abschluss $\overline{A}$ genau dann kompakt ist, wenn es für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge gibt, die in X konvergiert. Solche Teilmengen nennt man auch *präkompakt*.
(ii) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge präkompakter, offener Teilmengen in X mit $X_n \subseteq X_{n+1}$ für alle n und

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X.$$

(a) Zeigen Sie: Eine Folge $f_n : X \to \mathbb{C}$ stetiger Funktionen konvergiert genau dann gleichmäßig auf jedem Kompaktum $K \subset X$, wenn f_n in der folgenden Metrik auf der Menge der stetigen Funktionen konvergiert:

$$d(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|(f-g)|_{X_n}\|}{1+\|(f-g)|_{X_n}\|}$$

wobei $\|.\|$ das Supremum des Betrages der Einschränkung (die Supremumsnorm) bezeichne.
(b) Überzeugen Sie sich, dass d eine Metrik definiert und die Menge der stetigen Funktionen damit ein vollständiger metrischer Raum ist.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie eine mögliche Konstante L_K im Beweis von Satz 39 explizit in Termen der universellen Schranken c_K.

Aufgabe 3
Sei $\Gamma := \{te^{2\pi it} \mid t \in [0,\infty)\}$.
(i) Begründen Sie, dass es eine holomorphe Funktion $h : \mathbb{C} \setminus \Gamma \to \mathbb{C}$ gibt mit $h(z)^2 = z$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$.
(ii) Skizzieren Sie das Bild von h.