Übungsblatt 9

Komplexe Analysis und dynamische Systeme
SS 2017
Übung am 27.06.

Aufgabe 1
(a) Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, X sei kompakt und Y sei vollständig. Sei $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ eine Familie stetiger Funktionen. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Bedingungen:
(i) Für jedes $x \in X$ ist der Abschluss von $\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ in Y kompakt und für jedes $x \in X$ ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig in x.
(ii) Der Abschluss des Bildes von $\mathcal{F}$, $\overline{\{f(x) \mid x \in K, f \in \mathcal{F}\}} \subset Y$, ist kompakt und $\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig.
(b) Geben Sie Beispiele an, die zeigen, dass im Allgemeinen aus jeder einzelnen Bedingung in (i) nicht die entsprechende Bedingung in (ii) folgt.

Aufgabe 2
(i) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ Lipschitz-stetig. Dann besitzt f eine stetige Fortsetzung auf den Abschluss $\overline{\Omega}$.
(ii) Sei nun $\mathcal{F} \subset \Omega$ eine Familie stetiger Funktionen mit $\|f\|_\infty + \|\mathrm{grad} f\|_\infty \leq C < \infty$ für ein $C > 0$ und für alle $f \in \mathcal{F}$. Hierbei bezeichne $\|.\|_\infty$ die Supremums-Norm. Zeigen Sie, dass der Abschluss von $\mathcal{F}$ in $C_b(\Omega, \mathbb{C})$ versehen mit der Supremums-Norm kompakt ist.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass jeder kompakte metrische Raum separabel ist, d.h. eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.