Aufgaben zur Prüfungsklausur

Elementargeometrie, Sommersemester 2015

Berlin, den 28. Juli 2015

Aufgabe 1

a) Definieren Sie den Begriff der Mittelsenkrechten einer Strecke aus der Vorlesung. (1 Punkt)

b) Zeigen Sie: Ein Punkt P liegt auf der Mittelsenkrechten einer Strecke AB genau dann, wenn die Strecken $PA \cong PB$ kongruent sind. (4 Punkte)

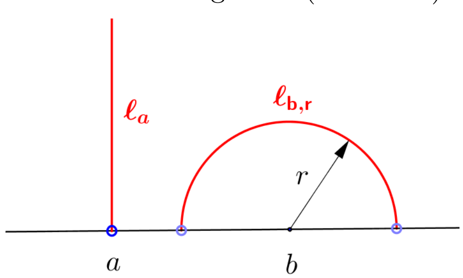
c) Beweisen Sie, dass die Mittelsenkrechten von je zwei Seiten eines Dreiecks in der euklidischen Ebene nicht parallel zueinander sind. (1 Punkt)

d) Beweisen Sie, dass sich die drei Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks in der euklidischen Ebene in genau einem Punkt schneiden. Begründen Sie, dass die Eckpunkte des Dreieckes auf einem Kreis um diesen Punkt liegen. (4 Punkte)

Aufgabe 2

a) Formulieren Sie die Axiome der Inzidenz und das Parallelenaxiom. (2 Punkte)

b) Beschreiben Sie die Geraden im Poincaré-Modell $\mathbb{H}$. Seien $A, B \in \mathbb{H}$ zwei Punkte in diesem Modell. Beschreiben Sie die Gerade durch diese Punkte. Begründen Sie, dass die angegebene Gerade die richtige und einzige ist. Hinweis: Nutzen Sie Argumente aus der Euklidischen Geometrie. Zeigen Sie, dass für die Poincaré-Halbebene die Inzidenzaxiome gelten. (7 Punkte)



c) Gilt das Parallelenaxiom im Poincaré-Modell? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)

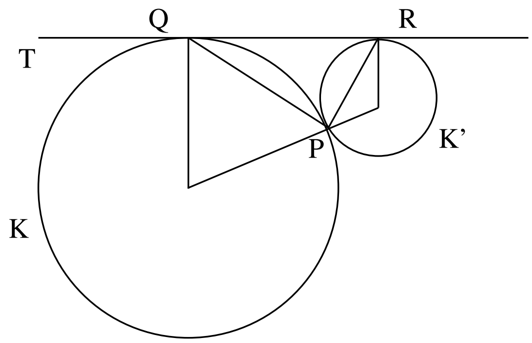
Aufgabe 3

a) Definieren Sie die Begriffe der Tangenten bzw. Sekanten an einen Kreis. (2 Punkte)

b) Eine Gerade g schneide einen Kreis K um M in einem Punkt P. Geben Sie eine äquivalente Bedingung dafür an, dass g eine Tangente an K ist. (1 Punkt)

c) Definieren Sie, was es heißt, dass sich zwei Kreise berühren. (1 Punkt)

d) Seien zwei Kreise K, K' in der euklidischen Ebene gegeben, die sich in einem Punkt P berühren. Weiter sei T eine gemeinsame Tangente an beide Kreise in Q bzw. R, die nicht durch P geht. (siehe Skizze). Beweisen Sie, dass der Winkel $\measuredangle(QPR)$ ein rechter Winkel ist. (6 Punkte)



Aufgabe 4

a) Was besagt der Peripherie-Zentriwinkelsatz und seine Umkehrung? (1 Punkt)

In b) und c) sei eine Gerade g in der euklidischen Ebene gegeben und eine Seite bezüglich g gewählt.

b) Sei ein spitzer Winkel $\measuredangle(h, k)$ gegeben. Weiterhin seien zwei verschiedene Punkte B und C auf g gewählt. Beschreiben Sie die Menge aller Punkte A auf der gewählten Seite von g, so dass $\measuredangle(CAB) \simeq \measuredangle(h, k)$ gilt. Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

c) Sei eine Strecke PQ gegeben. Zeigen Sie, dass die Menge aller Punkte A auf der gewählten Seite von g, für deren Fußpunkt F des Lotes auf g die Kongruenz $AF \cong PQ$ gilt, eine zu g parallele Gerade ist. Beschreiben Sie, welche Gerade dies genau ist. (3 Punkte)

d) Zeichnen Sie mithilfe eines Lineals mit Zentimetermaß zwei Strecken PQ der Länge 5cm und RS der Länge 7cm, sowie einen Winkel $\measuredangle(h, k)$ in einem Punkt O von 50^o mithilfe eines Winkelmessers.
Konstruieren Sie nun mit Zirkel und Lineal ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$, dessen Seite BC 7cm, dessen Höhe von A über BC 5cm und dessen Winkel $\measuredangle(BAC)$ 50^o groß sind. Das Zentimetermaß des Lineals soll dabei nicht mehr benutzt werden. Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und begründen Sie, dass ein auf diese Weise konstruiertes Dreieck die genannten Eigenschaften hat.
Hinweis: Die Durchführbarkeit der Konstruktion, d.h. insbesondere die Existenz dieses Dreiecks, muss in diesem Aufgabenteil nicht begründet werden (4 Punkte)

Zusatz: Diskutieren Sie die Durchführbarkeit Ihrer Konstruktion in Abhängigkeit der Größen der vorgegebenen Strecken und Winkel, d.h. diese dürfen hierbei auch andere Werte annehmen. (2 Punkte)