Aufgaben zur Prüfungsklausur

Elementargeometrie, Sommersemester 2015

Berlin, den 8. September 2015

Aufgabe 1

a) Formulieren Sie das Kongruenzaxiom (K4 - SWS). (1 Punkt)

b) Formulieren und beweisen Sie den Basiswinkelsatz für gleichschenklige Dreiecke und seine Umkehrung. (7 Punkte)

c) Gilt Teil b) auch in der Poincaré-Halbebene $\mathbb{H} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)

d) Zeichnen Sie mit Zirkel und Lineal ein gleichschenkliges Dreieck $\Delta(A, B, C)$ in der Poincaré-Halbebene. Begründen Sie kurz(!) Ihre Lösung. (1 Punkt)

Zusatz: Konstruieren Sie das Dreieck in (d) so, dass die Basis AB auf einer zur y–Achse parallelen euklidischen Geraden liegt. Sie dürfen einen Winkelmesser benutzen. (1 Punkt)

Aufgabe 2

a) Formulieren Sie das Pasch-Axiom (Axiom (A4) der Anordnung). (1 Punkt)

b) Definieren Sie den Begriff der Kongruenz von Dreiecken. Formulieren Sie einen der Kongruenzsätze für Dreiecke. (2 Punkte)

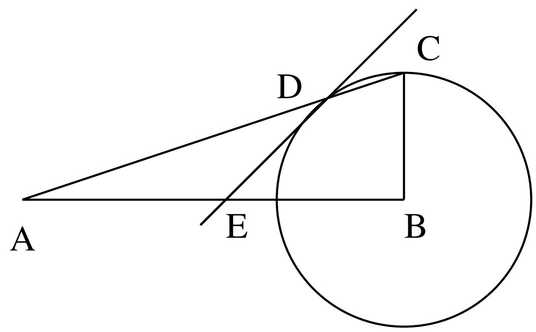
c) Gegeben sei ein Winkel $\measuredangle(h, k)$ in O. Beweisen Sie die Korrektheit und Durchführbarkeit der im Folgenden beschriebenen Konstruktion der Winkelhalbierenden: Wir markieren Punkte $A, B \in h$ und $C, D \in k$, so dass $OA \cong OC$, $OB \cong OD$ sowie $OA < OB$. E sei der Schnittpunkt von AD und BC. Dann ist der Strahl in O durch E die gesuchte Winkelhalbierende. (7 Punkte)

Aufgabe 3

a) Geben Sie die Definition einer Tangenten und einer Sekanten eines Kreis aus der Vorlesung wieder. (2 Punkte)

b) Gegeben sei ein Punkt P auf einem Kreis mit Mittelpunkt M. Beweisen Sie, dass eine Tangente durch P senkrecht auf MP steht. (4 Punkte)

c) Sei ein rechtwinkliges Dreieck $\Delta(A, B, C)$ gegeben mit rechtem Winkel $\measuredangle(ABC)$. Angenommen der Kreis mit Mittelpunkt B und Radius BC schneide die Seite AC in einem weiteren Punkt D und die Tangente in D schneide die Seite AB im Punkt E. Beweisen Sie, dass das Dreieck $\Delta(A, E, D)$ gleichschenklig ist. (4 Punkte)



Aufgabe 4

a) Geben Sie die Definition des Sinus eines Winkels aus der Vorlesung an und verdeutlichen Sie diese anhand einer Skizze. (1 Punkt)

b) Sei α ein Innenwinkel eines gleichseitigen Dreiecks. Berechnen Sie mithilfe der in a) angegebenen Definition den Sinus von α. (4 Punkte)

c) Formulieren Sie den Peripherie-Zentriwinkelsatz im Kreis. (1 Punkt)

d) Beweisen Sie die folgende Formel in einem euklidischen Dreieck $\Delta(A, B, C)$ aus der Vorlesung (Teil des "Sinussatzes"):

$$\frac{|BC|}{\sin(\measuredangle(BAC))} = 2R,$$

wobei R der Radius des Umkreises des Dreiecks ist. Fertigen Sie dazu eine Skizze an. Hinweis: Sie dürfen voraussetzen, dass der Winkel $\measuredangle(BAC)$ spitz ist. (4 Punkte)