Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 11

Elementargeometrie SS 2015

Abgabe: 29.06.2015

Aufgabe 1
Seien $\Delta(A, B, C)$ ein beliebiges Dreieck und P ein beliebiger Punkt aus dem Inneren des Dreicks. Sei D der Schnittpunkt von $G(C, P)$ mit $G(A, B)$, E der Schnittpunkt von $G(B, P)$ mit $G(A, C)$ und F der Schnittpunkt von $G(A, P)$ mit $G(B, C)$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\frac{|AD|}{|BD|} \cdot \frac{|CE|}{|AE|} \cdot \frac{|BF|}{|CF|} = 1.$$

Hinweis: Ähnlich wie bei der zweiten Aufgabe auf der Rückseite kann der Beweis durch geschicktes mehrmaliges Anwenden des Strahlensatzes bewiesen werden. Sie dürfen alternativ auch das Resultat jener Aufgabe verwenden.

Aufgabe 2
Sei $\Delta(A, B, C)$ ein Dreieck und D der Lotfußpunkt von C auf $G(A, B)$. Zeigen Sie:

a) Gilt $|AD| \cdot |BD| = |CD|^2$, so ist $\angle(A, C, B)$ ein rechter Winkel.

b) Gilt $|AB| \cdot |AD| = |AC|^2$, so ist $\angle(A, C, B)$ ein rechter Winkel.

Aufgabe 3
Seien K ein Kreis mit Radius r und AB und CD zwei Sehnen, die sich in einem rechten Winkel schneiden. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$|AC|^2 + |BD|^2 = 4r^2.$$

Bitte wenden!

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen besprochen werden:

- Beweisen Sie die Umkehrung des Satzen von Pythagoras, d.h. gilt in einem Dreieck $\Delta(A, B, C)$ $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$, so ist $\angle(A, C, B)$ ein rechter Winkel.
- Sei $\Delta(A, B, C)$ ein beliebiges Dreick und g ein Gerade, die $G(A, B)$ im Punkt D, $G(A, C)$ im Punkt E und $G(B, C)$ im Punkt F schneidet. Zeigen Sie, dass dann gilt:
$$\frac{|AD|}{|BD|} \cdot \frac{|CE|}{|AE|} \cdot \frac{|BF|}{|CF|} = 1.$$
- Seien K und K' zwei Kreise, die sich in genau zwei Punkten schneiden und g die Gerade durch beide Schnittpunkte. Zeigen Sie, dass ein Punkt P genau dann auf g liegt, wenn für für alle Sekanten s und s', ausgehend von P, die die Kreise K bzw. K' in A und B bzw. A' und B' schneiden mit $A \in PB$ und $A' \in PB'$, gilt:
$$|PA| \cdot |PB| = |PA'| \cdot |PB'|.$$
- Sei K ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r und P ein Punkt außerhalb des Kreises, sodass es einen Punkt T auf dem Kreis und eine Tangente an K durch P und T gibt mit $|PT| = 2r$. Die Schnittpunkt von $G(P, M)$ mit dem Kreis seien A und B mit $A \in PB$. Sei weiterhin $S \in PT$ der Punkt mit $|PS| = |PA|$. Bestimmen Sie das Verhältnis $\frac{|PT|}{|PS|}$.