Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 12

Elementargeometrie SS 2015

Abgabe: 06.07.2015

Aufgabe 1
Ausgehend von drei paarweise verschiedenen Geraden g, h und l, die sich in einem Punkt P schneiden, betrachten wir die folgende Konstruktion: Wir fixieren einen von P verschiedenen Punkt A auf g. Wir spiegeln A an h und l, um Punkte A_h bzw. A_l zu erhalten. Seien B und C die Schnittpunkte von $G(A_h, A_l)$ mit h bzw. l.

Beweisen Sie, dass A, B, C genau dann ein Dreieck ergeben, dessen Innenwinkelhalbierenden g, h und l sind, wenn diese die Bedingung der ersten Aufgabe der Rückseite erfüllen: die Winkel, die je zwei der Geraden bilden und deren Inneres die dritte Gerade nicht schneidet, sind spitz.

Aufgabe 2
a) Seien B, C zwei Eckpunkte B, C eine Dreiecks und H_B, H_C die Fußpunkte der Höhen von B bzw. C auf die jeweils gegenüberliegende Seite des Dreiecks. Zeigen Sie, dass die vier Punkte B, C, H_B, H_C auf einem Kreis liegen.

b) Finden und beschreiben Sie eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal eines Dreiecks aus der Länge einer Seite a und den Längen der Höhen h_b und h_c an die beiden anderen Seiten. Diskutieren Sie die Durchführbarkeit und Korrektheit der Konstruktion sowie die Zahl der Kongruenzklassen solcher Dreiecke.

Aufgabe 3
Sei ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ gegeben.

a) Seien $P, Q \in AB$, $R \in BC$ und $S \in CA$ Punkte, so dass das Viereck $PQRS$ ein Quadrat ist. Berechnen Sie die Seitenlänge dieses Quadrats in Termen von $AB = c$ und der Höhe h_c von C auf AB.

b) Wann existiert das Quadrat $PQRS$ mit den in a) geforderten Eigenschaften? Begründen Sie Ihre Antwort. Beschreiben und begründen Sie eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal im Fall der Existenz.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen besprochen werden:

- Wiederholen Sie den Beweis der Tatsache, dass sich die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks $\Delta(A, B, C)$ in einem Punkt P schneiden. Berechnen Sie die von den Winkelhalbierenden in ihrem Schnittepunkt gebildeten Winkel in Termen der Innenwinkel von $\Delta(A, B, C)$.

  Wir betrachten das folgende Problem: Gegeben drei paarweise verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt schneiden, konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$, so dass die gegebenen Geraden die Winkelhalbierenden des Dreiecks sind. Leiten Sie mithilfe der obigen Berechnung eine notwendige Bedingung dafür her, dass dieses Problem eine Lösung besitzt.

- Zeigen Sie, dass sich die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks im Verhältnis $2 : 1$ schneiden. Beschreiben und begründen Sie eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal eines Dreiecks aus der Kenntnis der Kongruenzklassen der drei Seitenhalbierenden.

- Sei $W \in AB$ der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle(BCA)$ mit der SeiteAB von $\Delta(A, B, C)$. Berechnen Sie das Verhältnis von AW und WB in Termen der Seitenlängen von $\Delta(A, B, C)$. Beschreiben und begründen Sie eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal von $\Delta(A, B, C)$ aus den Kongruenzklassen von AW, WB und CW.

- Es seien $P \in AB$, $Q \in BC$ und $R \in CA$ die Berührungspunkte des Inkreises von $\Delta(A, B, C)$ mit den drei Seiten. Zeigen Sie die Kongruenzen $PB \simeq BQ =: x$, $QC \simeq CR =: y$ und $RA \simeq AP =: z$ und berechnen Sie x, y und z in Termen von $AB = c$, $BC = a$ und $AC = b$. Beschreiben und begründen Sie eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal von $\Delta(A, B, C)$ aus der Kenntnis des Inkreisradius und zwei der Strecken x, y, z.