

# Übungsblatt 13

## Elementargeometrie SS 2015

Abgabe: 13.07.2015

---

### Aufgabe 1

Alle folgenden Konstruktionen sind mit Zirkel und Lineal auszuführen.

- Gegeben ist der Umkreisradius  $r > 0$  und zwei Winkel  $\alpha, \beta$  ( $\alpha, \beta < 180^\circ$ ) eines Dreiecks  $\Delta(ABC)$ . Konstruieren Sie das Dreieck  $\Delta(ABC)$ .
- Gegeben ein Kreis mit Durchmesser  $d$ , eine Strecke  $s \leq d$  und ein Punkt  $A$  außerhalb des Kreises. Konstruiere eine Sekante zum Kreis, die  $A$  enthält und so dass die entstehende Sehne des Kreises kongruent zur Strecke  $s$  ist.

### Aufgabe 2

- Es seien  $P \in AB$ ,  $Q \in AC$  und  $R \in CB$  die Berührungspunkte des Inkreises von  $\Delta(ABC)$  mit den drei Seiten. Zeigen Sie die Kongruenzen  $PB \cong BR =: x$ ,  $RC \cong CQ =: y$  und  $QA \cong AP =: z$  und berechnen Sie  $x, y$  und  $z$  in Termen von  $AB =: c$ ,  $BC =: a$  und  $AC =: b$ .
- Sei  $F$  der Berührungspunkt mit der Seitengeraden  $G(A, B)$  des Ankreises an die Seite  $BC$ . Bestimmen Sie die Länge der Strecke  $AF$  in Termen von  $a, b$  und  $c$ .
- Beweisen Sie eine Formel für den Radius des Ankreises des Dreiecks  $\Delta(ABC)$  an  $BC$  in Abhängigkeit der Seitenlängen  $a, b, c$ .

Hinweis: Verwenden Sie die Formel für den Radius des Inkreises aus der Vorlesung.

### Aufgabe 3

Es seien  $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch:

$$\phi_1(x, y) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}x, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \right),$$
$$\phi_2(x, y) = \left( -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Bestimmen Sie, welche der Abbildungen Isometrien sind und untersuchen Sie gegebenenfalls ob es eine Spiegelung oder eine Drehung ist. Bestimmen Sie auch die Spiegelungsachse bzw. das Drehzentrum und den Drehwinkel.

**Bitte wenden!**

---

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen besprochen werden:

- Gegeben zwei Strecken  $s_1, s_2$ . Man konstruiere das *arithmetische Mittel*  $s_a = \frac{1}{2}(s_1 + s_2)$ , *geometrische Mittel*  $s_g = \sqrt{s_1 \cdot s_2}$  und *harmonische Mittel*  $s_h = \frac{2s_1 s_2}{s_1 + s_2}$ .
- Im Inneren eines Winkels  $\angle(h, k)$  sei ein Punkt  $P$  gegeben. Konstruieren Sie einen Kreis, der tangential zu  $h$  und  $k$  ist und den Punkt  $P$  enthält.
- Wiederholen Sie den Ihnen aus der Vorlesung bekannten Begriff der Kommensurabilität von zwei Strecken und den geometrischen euklidischen Algorithmus. Zeigen Sie mithilfe des letzteren, dass in einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck die Katheten nicht kommensurabel sind zur Hypotenuse.
- Beweisen Sie, dass in einem regelmäßigen Fünfeck die Seite und die Diagonale nicht kommensurabel sind.  
Hinweis: Betrachten Sie das goldene Dreieck.
- Gegeben ein rechtwinkliges Dreieck  $\Delta(ABC)$  mit Hypotenuse  $AC$  und für welches  $\angle(ACB)$  kongruent ist zum Zweifachen von  $\angle(CAB)$ . Überprüfen Sie, ob die beiden Strecken  $AC$  und  $BC$  kommensurabel sind.
- Welche der folgenden Abbildungen  $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sind Isometrien?

$$\phi_1(x, y) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 - \sqrt{2} \right),$$
$$\phi_2(x, y) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 - \sqrt{2} \right).$$

Bestimmen Sie gegebenenfalls die Spiegelungsachse bzw. das Drehzentrum und den Drehwinkel.