
Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 14

Elementargeometrie SS 2015

Ferienblatt

Aufgabe 1

Konstruktion der Spiegelung am Kreis mit Zirkel und Lineal. Sei $K = K(M, r) \subset \mathbb{R}^2$ ein Kreis um M vom Radius $r > 0$. Sei $P \neq M$ ein beliebiger Punkt. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal den Bildpunkt $s_K(P)$. Hinweis: Sei P außerhalb des Kreises. Betrachten Sie das Dreieck, das durch M, P und einen Schnittpunkt der Senkrechten in $s_K(P)$ zu $G(M, P)$ gebildet wird.

Aufgabe 2

Seien K und L zwei Kreise. Zeigen Sie, dass folgende Abbildungen dort, wo sie definiert sind, gleich sind:

$$s_L \circ s_K \circ s_L = s_{s_L(K)}.$$

Hinweis: Die linke Seite hat offenbar viele Eigenschaften einer Kreisspiegelung (welche?). Betrachten Sie dann Kreise und Geraden, die senkrecht auf $s_L(K)$ stehen. Durch jeden Punkt, der nicht darauf liegt, gibt es unendlich viele solcher. Benutzen Sie dies.

Aufgabe 3

(a) Es gelten alle Axiome außer das Parallelenaxiom (darüber wissen wir nichts). Zeigen Sie, dass jede Isometrie die Verknüpfung von drei Spiegelungen ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede Isometrie von \mathbb{H}^2 eine der folgenden Isometrie ist: eine Spiegelung, eine Drehung, eine Verknüpfung zweier Spiegelungen, deren Spiegelachsen sich nicht schneiden, oder eine Verknüpfung letzterer mit einer Spiegelung, deren Spiegelachse senkrecht zu den beiden anderen Spiegelungen steht.

Aufgabe 4

Ein Tangram. Sei ein Rechteck, dessen längere Seite weniger als viermal so groß ist, gegeben. Zerlegen Sie dieses in drei konvexe polygonale Teile, die man zu einem flächengleichen Quadrat zusammenlegen kann. Hinweis: Legen Sie Rechteck und Quadrat an einer Ecke übereinander und zerschneiden Sie die entstehende Figur mit einem geraden Schnitt.

Aufgabe 5

Kreisspiegelung und Fußball. Auf welchem Weg sollte ein(e) Fußballer/in mit einem Ball auf das gegnerische Tor laufen? Er/sie sollte dabei in jedem Zeitabschnitt den größten Zuwachs des Winkels anstreben, den er/sie mit den beiden Torpfosten bildet, da er/sie nicht weiß, wann er/sie den Ball auf das Tor schießen muss. Hinweis: Betrachten Sie die "Isoangularen", d.h. die Menge der Punkte, die mit den Pfosten denselben Winkel bilden. Zu diesen sollte der Weg immer senkrecht verlaufen. Mit einer geeigneten Kreisspiegelung wird nun alles offensichtlich...