Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 2

Elementargeometrie SS 2015

Abgabe: 27.04.2015

Hinweis: Ein langer Text deutet nicht unbedingt auf eine schwere Aufgabe hin. Er dient als Hilfestellung für die ursprüngliche Aufgabe. Nehmen Sie sich die Zeit, ihn zu lesen. Fertigen Sie Skizzen an. Machen Sie die in Aufgabe 1 (c) vorgeschlagene Rechnung auf dem Papier.

Aufgabe 1

(a) Überprüfen Sie die auf der dritten Seite genannten Axiome (I1) und (I2) für die Poincarésche Halbebene (siehe Beispiel der Vorlesung). Die Ebene ist durch $\mathbb{H} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ defniniert. Die Geraden sind entweder $k_{m,r} := \{(x,y) \in \mathbb{H} \mid (x-m)^2 + y^2 = r^2\}$, d.h. Halbkreise vom Radius $r > 0$ und Mittelpunkt in $(m, 0)$ wobei $m \in \mathbb{R}$, also auf der x–Achse, oder $h_c := \{(c,y) \mid y > 0\}$, d.h. vertikale Halbgeraden.
(b) Die Strecken in diesem Modell seien wie folgt definiert: Liegen $A, B \in h_c$ auf einer vertikalen Halbgeraden, so ist AB gleich der üblichen Strecke im kartesischen Modell, d.h. wenn $A = (c,a)$ und $B = (c,b)$ dann ist $AB := \{(c,t) \mid t \in [a,b]\}$. Angenommen A und B liegen auf $k_{m,r}$ mit m und r wie in (a). $k_{m,r}$ ist der Graph der Funktion $\kappa_{m,r} : (m-r, m+r) \to (0,\infty)$, $\kappa_{m,r}(x) := \sqrt{r^2 - (x-m)^2}$. Also ist $A = (a, \kappa_{m,r}(a))$ und $B = (b, \kappa_{m,r}(b))$ mit $a, b \in (m-r, m+r)$ und $AB := \{(x, \kappa_{m,r}(x) \mid x \in [a,b]\}$. Prüfen Sie, ob mit diesen Festlegungen (A1), (A2) und (A3) gelten.
(c) Zum Nachweis des Paschaxiomes (A4) machen wir noch folgende Beobachtung: das Komplement einer jeden Geraden ist die disjunkte Vereinigung von zwei "konvexen" Teilmengen von $\mathbb{H}$. Dabei ist eine Teilmenge $U \subset \mathbb{H}$ "konvex", falls für je zwei Punkte $A, B \in U$ die in (b) definierte Strecke $AB \subset U$, d.h. vollständig in U enthalten ist. Außerdem schneidet die Strecke AB aus (b) die Gerade genau einmal, falls A und B in verschiedenen dieser Teilmengen liegen. Prüfen Sie diese Behauptung zunächst für das Komplement einer Geraden h_c. Für das Komplement von $k_{m,r}$ sind diese beiden Teilmengen durch $\{(x,y) \in \mathbb{H} \mid y^2 + (x-m)^2 < r^2\}$ bzw. $\{(x,y) \in \mathbb{H} \mid y^2 + (x-m)^2 > r^2\}$ gegeben. Seien zwei Punkte $A, B \in \mathbb{H}$ gegeben. Überprüfen Sie mithilfe der (parametrisierten) Form von AB aus (b) die Behauptung. Prüfen Sie mithilfe derselben nun das Pasch-Axiom.
(d) Gilt das Parallelenaxiom (P)? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

Führen Sie einen vollständigen Beweis von folgendem Satz aus der Vorlesung: "Von drei Punkten auf einer Geraden gibt es genau einen, der zwischen den beiden anderen liegt." (Satz 4) Benutzen Sie die auf der letzten Seite noch einmal gelisteten Axiome der Inzidenz und der Anordnung dabei und zeigen Sie insbesondere, dass die Voraussetzungen des Pasch-Axioms (A4) in den Situationen zutreffen, in denen dieses angewandt wird.

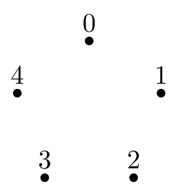
Bitte wenden!

Aufgabe 3

$\mathbb{Z}_5$ sei die Menge der Restklassen modulo 5. Mit der dort üblichen Addition und Multiplikation ist dies ein Körper. Das kartesische Produkt $E := \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ sei unsere Ebene. Die Geraden seien der Form $\{(x, y) \in E \mid ax + by + c = 0\}$ für $a, b, c \in \mathbb{Z}_5$ wobei $(a, b) \neq (0, 0)$ in $\mathbb{Z}_5$ gelten soll. Skizzieren Sie einige Beispiele. Begründen Sie, dass (I1) und (I2) gelten.

Strecken seien der folgenden Form: Es seien $A = (a_1, a_2)$ und $B = (b_1, b_2)$ zwei Punkte. Dann ist die Strecke $AB := \{A; B; 3(A + B)\}$. Die Addition ist dabei die komponentenweise Addition in E, d.h. die übliche Vektoraddition (aber in $\mathbb{Z}_5$). Prüfen Sie, dass $AA = \{A\}$. (Hinweis: $3 \cdot 2 = 1$ in $\mathbb{Z}_5$.)

Zeichnen Sie für die Gerade $\mathbb{Z}_5 \times \{0\}$ alle möglichen Strecken ein. Hinweis: Zeichnen Sie die fünf Punkte der Gerade (mit der ersten Koordinate als Bezeichnung) mit ungefähr gleichen Abständen auf einem Kreis ein und zeichnen Sie dann alle Strecken mit unterschiedlichen Farben ein, indem Sie mit einem Lineal den Anfangs- und Endpunkt jeweils mit dem dritten Punkt verbinden. So bekommen Sie ein kombinatorisches Bild der Situation.



Weisen Sie für die Strecken die Axiome (A1),(A2) und (A3) nach. Gelten Satz 3 und Satz 4? Kann Satz 5 oder das Pasch-Axiom (A4) gelten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Bitte wenden!

In der Vorlesung behandeln wir die folgenden Axiome:
(I1) Zu je zwei Punkten gibt es genau eine Gerade, die diese beiden Punkte enhält.
(I2) Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte. Die Ebene enthält mindestens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

(A1) Ein Punkt liegt zwischen A und B genau dann, wenn er zwischen B und A liegt, d.h. für die Strecken gilt: $AB = BA$.
(A2) Für zwei beliebige Punkte A und C gibt es einen Punkt B auf der Geraden $G(A, C)$, so dass C zwischen A und B liegt.
(A3) Von drei Punkten auf einer Geraden gibt es höchstens einen, der zwischen den beiden anderen liegt.
(A4) Seien A, B, C drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Eine Gerade, die durch keinen dieser drei Punkte verläuft und einen Punkt zwischen A und B enthält, enthält auch entweder einen Punkt zwischen A und C oder zwischen B und C. (Pasch-Axiom)

(P) Zu jeder Geraden und jeden Punkt, der nicht auf dieser liegt, gibt es höchstens eine Gerade durch diesen Punkt, die parallel zur ersten Gerade ist.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 20./21.04. besprochen werden:

- Überprüfen Sie die Axiome der Inzidenz für Punkte und Geraden in der Ebene und der Anordnung, wenn die Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist und die Kreise und Geraden in $\mathbb{R}^2$, die durch die 0 gehen (genauer der Durchschnitt dieser mit $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$) die Menge der Geraden bilden. Sie dürfen dabei natürlich alles Wissen um Kreise und Geraden in $\mathbb{R}^2$, benutzen. Gilt das Parallelenaxiom?

- Führen Sie einen vollständigen Beweis von folgendem Satz aus der Vorlesung: "Zu je zwei Punkten A und B gibt es einen Punkt, der zwischen A und B liegt." (Satz 3) Benutzen Sie die oben genannten Axiome dabei und zeigen Sie insbesondere, dass die Voraussetzungen des Pasch-Axioms in den Situationen zutreffen, in denen dieses angewandt wird.

Außerdem können noch Aufgaben der Rückseite von Blatt 1 besprochen werden.