

# Übungsblatt 3

## Elementargeometrie SS 2015

Abgabe: 04.05.2015

---

### Aufgabe 1

- (a) Gegeben sei ein Punkt  $P$  auf einer Geraden  $g$ . Zeigen Sie, dass sein Komplement  $g \setminus \{P\}$  die disjunkte Vereinigung von genau zwei konvexen Teilmengen ist.
- (b) Beweisen Sie, dass in einer Geometrie, für die die Inzidenz- und die Anordnungsaxiome, sowie die Kongruenzaxiome für Strecken (K1) und (K2) gelten, für drei Punkte,  $A, B, C$  mit  $B \in AC$  und drei Punkte  $A', B', C'$  mit  $B' \in A'C'$  gilt: Ist  $AB \cong A'B'$  sowie  $AC \cong A'C'$ , so ist auch  $BC \cong B'C'$ .

### Aufgabe 2

Für die kartesische Ebene  $\mathbb{R}^2$  seien die üblichen Geraden und Strecken definiert, für die wir annehmen, dass die Inzidenzaxiome und Anordnungsaxiome gelten (im besten Fall haben Sie sich selbst davon überzeugt). Für zwei Punkte  $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$  sei der Abstand  $d(A, B) := |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$  definiert. Zwei Strecken  $AB$  und  $CD$  seien genau dann kongruent, wenn  $d(A, B) = d(C, D)$ .

- (a) Skizzieren Sie drei Punkte  $A, B, C$ , die nicht auf einer Geraden liegen, und für die  $AB, BC$  und  $AC$  kongruent sind.
- (b) Weisen Sie die Kongruenzaxiome (K1) und (K2) nach.

### Aufgabe 3

Für den Beweis von Satz 7 der Vorlesung, dass eine beliebige Strecke  $AB$  (für verschiedene Punkte  $A$  und  $B$  unendlich viele Punkte enthält, haben wir folgende Konstruktion durchgeführt: Wir wählen induktiv  $P_1$  zwischen  $A$  und  $B$ ,  $P_2$  zwischen  $P_1$  und  $B, \dots$ . Für jede Zahl  $k \in \mathbb{N}$  wählen wir  $P_k$  zwischen  $P_{k-1}$  and  $B$ . Beweisen Sie mithilfe geeigneter vorher formulierter Axiome und bewiesener Aussagen, dass für alle  $i, j, k \in \mathbb{N}$  mit  $i < j < k$  der Punkt  $P_j$  zwischen  $P_i$  and  $P_k$  liegt.

Bitte wenden!

---

Die Kongruenz von Strecken sei eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Strecken, bezeichnet mit  $AB \cong CD$  mit folgenden Eigenschaften/Axiomen:

(K1) Sei  $AB$  eine Strecke und  $s$  ein Strahl mit Anfangspunkt  $P$ . Dann gibt es genau einen Punkt  $Q$  auf  $s$  mit  $PQ \cong AB$

(K2) Gilt für Punkte  $A, B, C$  und  $A', B', C'$  mit  $B \in AC$  und  $B' \in A'C'$ , dass  $AB \cong A'B'$  und  $BC \cong B'C'$ , so gilt auch  $AC \cong A'C'$ .

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 27./28.04. besprochen werden:

- Die Ebene sei die obere Halbsphäre  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ , die Menge der Geraden besteht aus den Großkreisen geschnitten mit der Halbsphäre (mit Ausnahme des Äquators, der diese ja nicht schneidet). Was sollten die Strecken sein? Begründen Sie, dass dafür die Inzidenzaxiome und die Anordnungsaxiome gelten. Gilt das Parallelenaxiom (P)?
- Zeigen Sie, dass das Paschaxiom (A4) aus den anderen Anordnungsaxiomen, den Inzidenzaxiomen und der Aussage von Satz 8 über die Halbebenen folgt.
- Für Punkte einer "Geraden"  $g$ , d.h. einer Menge sei je zwei "Punkten"  $A$  und  $B$  eine "Strecke"  $AB \subset g$  zugeordnet. Für diese Zuordnung gelte (A1), (A2) sowie (A3). Wie viele Punkte muss  $g$  dann mindestens enthalten? (Bemerkung: Für diese Diskussion ist keine Ebene nötig, in der die "Gerade" liegt, daher sind hier die Begriffe in Anführungszeichen aufgeführt.)
- Prüfen Sie die folgenden zwei Aussagen. Begründen Sie Ihre Antwort.
  - (a)  $\mathbb{R}^2$  mit der üblichen Definition von Geraden und Anordnung sowie die durch die Euklidischen Abstandsfunktion definierte Kongruenz von Strecken (siehe Aufgabe 2) erfüllt die Axiome der Kongruenz für Strecken.
  - (b) Die analoge Aussage für  $\mathbb{Q}^2$  gilt nicht. Genauer: Das erste Kongruenzaxiom ist verletzt.
  - (c)  $\mathbb{R}^3$  mit der üblichen Definition von Geraden und Strecken erfüllt die Axiome der Inzidenz und der Anordnung.
- Führen Sie den Beweis für Satz 6 der Vorlesung:  $n$  verschiedene Punkte auf einer Geraden lassen sich so mit  $P_1, \dots, P_n$  bezeichnen, dass für alle  $i, j, k \in \mathbb{N}$  mit  $i < j < k$  der Punkt  $P_j$  zwischen  $P_i$  und  $P_k$  liegt.