Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

# Übungsblatt 4

## Elementargeometrie SS 2015

### Abgabe: 11.05.2015

**Aufgabe 1**

Es gelten die Inzidenz-, die Anordnungs- und die Kongruenzaxiome und damit auch deren Folgerungen aus der Vorlesung. Sei $g$ eine Gerade, und $O \in g$ ein Punkt darauf. Wir betrachten die binäre Operation $+$ auf $g$ aus Folgerung 10.
(a) Vervollständigen Sie den Beweis der Kommutativität ($A + B = B + A$), indem Sie diese für den Fall $O \in AB$ beweisen.
(b) Beschreiben Sie zu jedem $A \in g$ das Inverse bzgl. dieser Operation, d.h. den Punkt $B \in g$ mit $B + A = O$ und begründen Sie dies.

**Aufgabe 2**

Es gelten die Inzidenz- und die Anordnungsaxiome und damit auch deren Folgerungen aus der Vorlesung. Gegeben seien drei Punkte $A, B, C$, die nicht auf einer Geraden liegen.
(a) Beweisen Sie, dass dann die Vereinigung

$$\bigcup_{S \in BC} G(A,S) \cup \bigcup_{T \in AC} G(B,T) \cup \bigcup_{U \in AB} G(C,U)$$

alle Punkte der Ebene enthält.
Hinweis: Sie müssen nur Punkte betrachten, die nicht im Inneren liegen (siehe Aufgabe auf der Rückseite). Untersuchen Sie für solch einen Punkt die möglichen Lageverhältnisse desselben bezüglich eines jeden der Eckpunkte und der Geraden, die durch die anderen beiden Punkte gegeben ist.
(b) Zeigen Sie, dass die Menge der Inneren Punkte eines Dreiecks (siehe Rückseite) nicht leer ist.

**Aufgabe 3**

Beweisen Sie, dass im kartesischen Modell das Kongruenzaxiom (K4), d.h. der Kongrunezsatz [SWS] gilt, d.h.
(a) zeigen Sie, dass die den gegebenen Winkeln gegenüberliegenden Seiten "gleich lang" sind, d.h. die euklidischen Abstände ihrer Endpunkte übereinstimmen.
(b) Beweisen Sie, dass ein Paar von an diese Seiten anliegenden Winkeln kongruent ist.

Das Argument für das zweite Paar ergibt sich durch Vertauschen geeigneter Punkte und darf ausgelassen werden. Die für die Aufgabe benötigten Begriffe der Kongruenz von Strecken und Winkeln im kartesischen Modell sind auf der Rückseite zusammengefasst.

**Bitte wenden!**

Eine kurze Wiederholung von Begriffen und Fakten aus der aktuellen Vorlesung und der Vorlesung "Lineare Algebra und Analytische Geometrie I" über das kartesische Modell $\mathbb{R}^2$, die Sie hier nicht beweisen sollen: Für zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^2$ bezeichne $\overrightarrow{PQ} \in \mathbb{R}^2$ den Vektor, der sich durch die Differenzen der beiden Punktkoordinaten ergibt: Mit $P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2)$ ist $\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$. Für drei beliebige Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$. Für einen Vektor $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ bezeichne $\|\overrightarrow{v}\| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ die euklidische Norm. Dann ist der euklidische Abstand zwischen zwei Punkten $P, Q \in \mathbb{R}^2$ gleich der euklidischen Norm des Vektors $\overrightarrow{PQ}$: $d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$. Die Winkelkongruenz in $\mathbb{R}^2$ sei wie in der Vorlesung definiert. Seien $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$, sowie $P', Q', R' \in \mathbb{R}^2$ jeweils drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Dann gilt für die Winkel $\angle(PQR) \cong \angle(P'Q'R')$ genau dann, wenn

$$\frac{\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}}{\|\overrightarrow{QP}\|\|\overrightarrow{QR}\|} = \frac{\overrightarrow{Q'P'} \cdot \overrightarrow{Q'R'}}{\|\overrightarrow{Q'P'}\|\|\overrightarrow{Q'R'}\|}.$$

Der Ausdruck $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}$ notiere das Skalarprodukt von Vektoren in $\mathbb{R}^2$.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen besprochen werden:

- Vervollständigen Sie den Beweis der Assoziativität in Folgerung 10. Begründen Sie zunächst, dass unter Ausnutzung der Kommutativität der dort definierten Operation (die unabhänging davon gezeigt wird), der einzige noch zu untersuchende Fall $0 \notin BC$ $0 \in AB$ verbleibt. Für diesen weisen Sie dann $(A + B) + C = A + (B + C)$ nach.

- Führen Sie einen vollständigen Beweis von folgendem Satz aus der Vorlesung: "Zu je zwei Punkten $A$ und $B$ gibt es einen Punkt, der zwischen $A$ und $B$ liegt." (Satz 3) Benutzen Sie die oben genannten Axiome dabei und zeigen Sie insbesondere, dass die Voraussetzungen des Pasch-Axioms in den Situationen zutreffen, in denen dieses angewandt wird.

- Es gelten die Inzidenz- und Anordnungsaxiome.
(a) Seien $h_1, ..., h_k$ Strahlen in $O$, die alle auf einer Seite einer Geraden $g$ durch $O$ liegen. Zeigen Sie, dass es eine Gerade gibt, die alle Strahlen schneidet. Hinweis: Wählen Sie einen Punkt $Q$ auf $g$ verschieden von $O$ und sukzessive Punkte $P_1, ..., P_k$ auf den Strahlen, $P_i \in h_i$, so dass für $k \geq 2$ $P_k$ im Inneren des Winkels $\angle(P_{k-1}QO)$ liegt. Überlegen Sie sich, warum das immer geht. Wählen Sie dann einen Strahl im Inneren vom Winkel $\angle(P_kQO)$ und begründen Sie, warum dieser im Inneren aller anderen Winkel $\angle(P_jQO$ liegen muss. Zeigen Sie schließlich, dass dieser Strahl alle Strahlen $h_1, ..., h_k$ schneidet.
Für (b) und (c) benutze man das Resultat von (a). (b) Zeigen Sie: von drei Strahlen mit gemeinsamen Anfangspunkt, die paarweise auf keiner gemeinsamen Geraden liegen, liegt genau einer im Inneren des Winkels, der von den beiden anderen gebildet wird.
(c) Es gelten nun außerdem die Kongruenzaxiome und sei für die Strahlen, $h, k, l, h', k', l'$ mit demselben Anfangspunkt $O$ der Strahl $k$ (ohne den Punkt $O$ im Inneren des Winkels $\angle(h, l)$ und der Strahl $k'$ im Inneren des Winkels $\angle(h', l')$ gelegen und $\angle(h, k) \cong \angle(h', k')$ sowie $\angle(h, l) \cong \angle(h', l')$. Zeigen Sie, dass daraus $\angle(k, l) \cong \angle(k', l')$ folgt. (b)Seien vier Strahlen mit demselben Anfangspunkt $O$, die bis auf diesen alle in einer Halbebene bzgl. einer Geraden durch $O$ liegen. Zeigen Sie, dass man diese so mit $h, k, l, m$ bezeichnen kann, dass $k$ im Inneren von $\angle(h, l)$ und $\angle(h, m)$ sowie $l$ im Inneren von $\angle(h, m)$ und $\angle(k, m)$ liegen.

- Es gelten die Inzidenz- und die Anordnungsaxiome und damit auch deren Folgerungen aus der Vorlesung. Gegeben seien drei Punkte $A, B, C$, die nicht auf einer Geraden liegen.
(a) Definieren Sie dass Innere des Dreiecks $\Delta(A, B, C)$ mihilfe der Halbebenen bzgl. der Geraden, die durch jeweils zwei der Punkte gehen.
(b) Zeigen Sie die Behauptung aud Aufgabe 2 der Vorderseite, für alle Punkte im Inneren des Dreiecks.