Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 5

Elementargeometrie SS 2015

Abgabe: 18.05.2015

Aufgabe 1
Folgende Konstruktion wird in der Vorlesung im Beweis von Satz 22 durchgeführt: Gegeben sei eine Gerade g, ein Punkt P auf ihr, sowie ein Strahl h in P, der auf g liegt. Weiterhin sei ein Strahl k in P, der nicht auf g liegt beliebig gewählt, sowie ein Punkt $Q \in k$ verschieden von P. Nun wird der Winkel $\angle(h, k)$ in P auf die Seite von g abgetragen, in der k nicht liegt. Auf dem resultierenden Strahl l in P wird die Strecke PQ in P abgetragen. Man erhält den Punkt R. Da Q und R auf verschiedenen Seiten von g liegen, schneidet die Strecke QR die Gerade g in einem Punkt S zwischen Q und R. Nun wird bewiesen, dass QR senkrecht auf g steht, d.h. der Winkel in S, der vom Strahl h und dem Strahl in S, der durch Q geht, gebildet wird, ist ein rechter Winkel. Dabei sind drei Fälle zu beweisen: $S = P$, $S \in h \setminus \{P\}$ und $S \notin h$. Der Fall $S = P$ wurde in der Vorlesung behandelt. Beweisen Sie hier die Behauptung für die anderen beiden Fälle. Begründen Sie jeden Beweisschritt mit den zuvor eingeführten Axiomen oder formulierten Sätzen und Behauptungen.

Aufgabe 2
Gegeben sei ein Winkel auf einem Blatt Papier. Sie haben nur ein Lineal auf dem nur noch wenige Markierungen der Maßeinteilung zu sehen sind und einen Bleistift zur Verfügung. Konstruieren Sie die Winkelhalbierende, d.h. den Strahl im Inneren des Winkels, der mit den beiden Schenkeln zwei kongruente Winkel bildet. Beweisen Sie, dass Ihr konstruierter Strahl die Winkelhalbierende ist.

Aufgabe 3
Sei $\mathbb{H} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ die obere Halbebene mit den Geraden und Strecken des Poincaré-Modells (siehe Übungsblatt 2, Aufgabe 1). Seien $A, B, A', B' \in \mathbb{H}$ vier Punkte. Dann gelte $AB \cong A'B'$ falls $h(A, B) = h(A', B')$, wobei die reelle Zahl $h(A, B)$ für $A, B \in \mathbb{H}$ wie folgt definiert wird:
(1) Sind die x–Koordinaten von A und B gleich, d.h. $A = (x_0, y_1)$ und $B = (x_0, y_2)$, dann ist

$$h(A, B) := \frac{(y_1 - y_2)^2}{y_1 y_2}.$$

(2) Seien die x–Koordinaten von A und B verschieden, d.h. A und B liegen auf einem kartesischen Kreis vom Radius $r > 0$ in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $(m, 0)$ auf der x–Achse. Wir betrachten nun die kartesischen Strahlen in $(m-r, 0)$ in $\mathbb{H}$, die A bzw. B enthalten. Seien $\widetilde{A}$ und $\widetilde{B}$ deren Schnitte mit einer beliebigen kartesischen Halbgeraden $\{(x_0, y) \mid y > 0\}$ für $x_0 > m - r$. Dann sei $h(A, B) := h(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ mit letzterem definiert durch (1).
(a) Fertigen Sie eine Skizze für den Fall (2) an. Begründen Sie, dass die Definition für diesen Fall unabhängig von der speziellen Wahl von x_0 ist, indem Sie entweder geometrisch argumentieren oder $h(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ aus den Daten $m, r, x_0, A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ berechnen.
(b) Beweisen Sie, dass für die oben definierte Kongruenz von Strecken im Poincaré-Modell das Kongruenzaxiom (K1) gilt. Hinweis: Untersuchen Sie dafür das Monotonieverhalten von $h(A, B)$ bei festem A wenn B auf einer festen Gerade (des Poincaré-Modells) durch A liegt.
(c) Zeigen Sie, dass das Kongruenzaxiom (K2) gilt. Hinweis: Begründen Sie, dass es genügt, den Fall zu betrachten, bei dem alle drei Punkte dieselbe x–Koordinate haben. Weisen Sie dann nach, dass die Strecken $(x_0, y_1)(x_0, y_2) \cong (x_0, y_1')(x_0, y_2')$ kongruent sind, genau dann wenn $\frac{y_2}{y_1} = \frac{y_2'}{y_1'}$ oder $\frac{y_2}{y_1} = \frac{y_1'}{y_2'}$. Folgern Sie daraus die Gültigkeit des Axioms.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen besprochen werden:

- Beweisen Sie die Behauptung aus Aufgabe 1 für den Fall $S \in h \setminus \{P\}$.
- Ihnen steht ein ebenes Stück Glas (z.B. eine Scherbe einer Fensterscheibe) oder durchsichtige Plastik (z.B. ein Stück eines Lineals) mit einer geraden Kante (die Spiegelkante, die Linealkante) sowie ein Marker, der darauf und auf Papier schreibt, zur Verfügung. Konstruieren Sie mithilfe dieser beiden Dinge einen rechten Winkel auf einem Blatt Papier. Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.
- Können Sie mit Hilfe des Stückes auch die Gerade in einem gegeben Punkt einer Geraden, die senkrecht auf dieser steht, konstruieren?
- Konstruieren Sie mit Hilfe des Stückes aus der vorigen Aufgabe den Mittelpunkt einer gegebenen Strecke. Warum ist Ihre Konstruktion korrekt?
- Sie haben nur ein Blatt Papier vor sich und weder Stift noch Lineal. Wie verschaffen Sie sich zwei sichtbare Linien daauf, die Geraden darstellen, die senkrecht aufeinander stehen? Können Sie jeden Schritt Ihrer Lösung begründen?
- Was für eine Eigenschaft hat die Gerade h im Beweis von Satz 29 der Vorlesung. (Falls dieser Beweis zum Zeitpunkt der Übung noch nicht dran war, kann diese Frage eine Woche später diskutiert werden.