Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 6

Elementargeometrie SS 2015

Abgabe: 27.05.2015

In der betrachteten Ebene seien die Axiome der Inzidenz, der Anordnung sowie der Kongruenz gültig. Ansonsten soll bei der Bearbeitung der Aufgaben auf diesem Blatt das Parallelenaxiom nicht vorausgesetzt werden, es sei denn eine Fragestellung fordert dies explizit. Insbesondere sollen Sie nicht den Innenwinkelsatz im Dreieck benutzen oder analytisch im kartesischen Koordinatensystem argumentieren.

Aufgabe 1
Beweisen Sie den Kongruenzsatz $[WWS]$ für Dreiecke: Gilt $AB \cong A'B'$, $\angle(BAC) \cong \angle(B'A'C')$ sowie $\angle(ACB) \cong \angle(A'C'B')$, so ist $\Delta(A,B,C) \cong \Delta(A',B',C')$. Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\angle(ABC) \cong \angle(A'B'C')$, indem Sie zunächst einen Winkel im anderen unter einer geeigneten Voraussetzung abtragen. Verwenden Sie die schon bewiesenen Sätze [WSW], Satz 14(2) und den Satz vom Außenwinkel.

Aufgabe 2
Beweisen Sie folgende Aussagen: (a) Sei P ein Punkt, der nicht auf der Geraden g liegt. Zeigen Sie, dass man von P das "Lot auf g fällen" kann, d.h. genau eine Gerade durch P finden kann, die g wieder so schneidet, dass beide senkrecht aufeinander stehen.
(b) Sei Q der Schnittpunkt der Lot-Geraden mit g. Zeigen Sie, das die Strecke PQ kleiner ist (im Sinne von Definition 11) als jede Strecke PR, wobei $R \in g$ ein beliebiger Punkt auf der Geraden ist, der nicht mit Q übereinstimmt.
Hinweis: Die Beweisidee für Satz 22 der Vorlesung über die Existenz des rechten Winkels ist nützlich für (a), der Satz vom Außenwinkel für (b).

Aufgabe 3
(a) Sei $\angle(AOB)$ ein Winkel und P ein beliebiger Punkt im Inneren von $\angle(AOB)$. Wir bezeichnen mit A' bzw. B' den Schnittpunkt der Lot-Gerade durch P mit der Gerade $G(O,A)$ bzw. $G(O,B)$ (siehe Aufgabe 2 für eine Definition des Begriffes und Diskussion von deren Existenz).
Zeigen Sie: P liegt auf der Winkelhalbierenden genau dann, wenn die Strecken PA' und PB' kongruent sind.
(b) Zeigen Sie: Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks $\Delta(A,B,C)$ schneiden sich in einem Punkt.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass zwei Winkelhalbierende sich tatsächlich schneiden. Um nun zu beweisen, dass die dritte Winkelhalbierende durch diesen Punkt geht, ist die in Teil (a) gezeigte Aussage hilfreich.

Bitte wenden!

Wiederholen Sie Definition 26 bis Satz 38 der Vorlesung. Studieren Sie die Konstruktionen in den Beweisen der Sätze 22, 29, 16 [SSS], 30, 32, 33.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen besprochen werden:

- Beweisen Sie den Kongruenzsatz [SsW] für Dreiecke.
  Hinweis: Seien $\Delta(A, B, C)$ und $\Delta(A', B', C')$ mit $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $\angle(ACB) \cong \angle(A'C'B')$ sowie $AB > BC$ gegeben. Tragen Sie die dritte Strecke AC geeignet am Dreieck $\Delta(A', B', C')$ ab. Benutzen Sie das Kongruenzaxion (K4/[SWS]), ud die Sätze über gleichschenklige Dreiecke und den Satz vom Außenwinkel, sowie Satz 30. An welcher Stelle geht die spezielle Voraussetzung von $[SsW]$, nämlich $AB > BC$ ein?.

- Die Mittelsenkrechte einer Strecke sei definiert als die Gerade, die senkrecht auf dieser steht und den Mittelpunkt der Strecke enthält. Zeigen Sie, dass ein Punkt der Ebene genau dann auf der Mittelsenkrechte einer gegebenen Strecke liegt, wenn die Strecken von diesem Punkt zu den Endpunkten der gegebenen Strecke kongruent sind.

- Beweisen Sie, dass die Mittelsenkrechten eines Dreiecks darin entweder paarweise parallel sind oder sich in einem Punkt schneiden. Beweisen Sie in letzterem Fall, dass die Punkte dann auf einem Kreis liegen, d.h. dass es einen Punkt in der Ebene gibt, für den alle drei Strecken zu den Eckpunkten des Dreiecks kongruent sind. Begründen Sie, dass im Falle der Gültigkeit des Parallelenaxioms immer der zweite Fall eintritt: die Geraden schneiden sich in einem Punkt. Hinweis: Die Betrachtungen der vorangegangenen Aufgabe sind nützlich.

- Zeigen Sie, dass für drei Punkte A, B, C die Dreiecksungleichung $AC \leq AB + BC$ gilt. Dabei ist die Ungleichung im Sinne von Definition 11 gemeint und die Addition $AB + BC$ im Sinne der sukzessiven Streckenabtragung an einen Strahl in einem Punkt (ähnlich zu Folgerung 10).