Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 8

Elementargeometrie SS 2015

Abgabe: 08.06.2015

Aufgabe 1
Für die folgende Aufgabe wird das teilweise in der Vorlesung wiederholte Wissen über die analytische Geometrie der kartesischen Ebene benötigt.
(1) Gegeben sei eine Kreis K mit Mittelpunkt $M = (4,3)$ und Radius $r = 5$. Berechnen Sie die Schnittpunkte mit der Geraden $g = \{(x,y) \mid 4x + 3y - 24 = 0\}$. Bestimmen Sie die Tangenten an den Kreis im Schnittpunkt mit der größeren x–Koordinate und beschreiben Sie diese explizit und implizit. Ist der Peripherie-Winkel im Ursprungspunkt $(0,0)$ über der Sehne zwischen den beiden Schnittpunkten größer, gleich oder kleiner als ein rechter Winkel. Erläutern Sie Ihre Rechnungen und begründen Sie Ihre Antworten.
(2) Seien drei Kreise in der kartesischen Ebene gegeben, die sich paarweise in zwei Punkten schneiden. Beweisen Sie mithilfe der analytischen Geometrie, dass sich die drei Geraden, die durch diese Paare von Schnittpunkten gehen, in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 2
Eine Aufgabe aus dem "Mathematischen Weihnachtskalender 2014" gestellt von Prof. Andreas Filler (in Kurzform): "Der Weihnachtsmann vergräbt einen Schatz, den seine Wichtel finden sollen. Er läuft vom Weihnachtsbaum zu einer Eiche dreht sich um einen rechten Winkel nach rechts, läuft dieselbe Streckenlänge in die neue Richtung und markiert die erreichte Stelle mit einem Stab. Dann läuft er vom Weihnachtsbaum zu einer Buche, dreht sich um einen rechten Winkel nach links, läuft dieselbe Streckenlänge in die neue Richtung und markiert auch diese Stelle. Mithilfe einer langen Schnur ermittelt er den Mittelpunkt der Strecke zwischen beiden Markierungen und vergräbt den Schatz dort. Zum Schluss lässt er es Frau Holle kräftig schneien und hinterlässt den Wichteln eine Nachricht, in der er (wie oben) beschreibt, wo er den Schatz vergraben hat. Um es noch ein bisschen schwieriger zu machen, nimmt er den Weihnachtsbaum am Ende mit! Die Wichtel wissen also nicht, von wo aus er zum Ermitteln der Markierungen jeweils gestartet ist. Buche und Eiche stehen natürlich noch da. Können die Wichtel den Schatz trotzdem finden?" Experimentieren Sie mit einer Geometrie-Software (z.B. Geogebra). Stellen Sie eine Hypothese auf und beweisen Sie diese. Sie dürfen dies mithilfe eines kartesischen Koordinatensystems oder elementargeometrisch tun. Für letzteres gibt es noch ein paar nützliche Dinge auf der Rückseite, die Sie verwenden dürfen und folgenden Hinweis: Fällen Sie die Lote von den Markierungen, der Tanne und dem Mittelpunkt auf die Gerade durch E und B (die Eiche und die Buche).

Aufgabe 3
Beweisen Sie folgende Umkehrung des Satzes des Thales: Sind A, B, C drei Punkte auf einem Kreis und ist der Winkel in C, $\angle(ACB)$ ein rechter Winkel, so ist AB ein Durchmesser. Arbeiten Sie dabei nicht analytisch in der kartesischen Ebene sondern benutzen Sie nur die bisher behandelten Axiome und die daraus abgeleiteten Aussagen (Theoreme, Sätze und Folgerungen).

Bitte wenden!

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen besprochen werden:

- Sei K ein Kreis in der kartesischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $M = (x_0, y_0)$ und Radius $r > 0$. Geben Sie eine explizite Darstellung von K an, d.h. geben Sie Funktionen f, g in einer reellen Variable an und mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ an, der ein offenes Intervall enthält, auf dem beide Funktionen differenzierbar sind, so dass $\{(f(t), g(t) \mid t \in D\} \subset K$ eine Teilmenge des Kreises ist (es darf auch der ganze Kreis sein).
  Weisen Sie für Ihre gewählte Parametrisierung nach, dass $t := \{(f(t_0) + tf'(t_0), g(t_0) + tg'(t_0)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ eine Tangente an K in $(f(t_0), g(t_0))$ ist, wobei $t_0 \in D$ ein Punkt ist, in dem f und g differenzierbar sind.
  Gilt dies für jede Parametrisierung? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Seien A und B zwei Punkte der kartesischen Ebene $\mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass die Menge der Punkte $P \in \mathbb{R}^2$ mit $d(P, A) = \lambda d(P, B)$ für eine fest gegebene Zahl $\lambda \in (0, 1)$ ein Kreis ist. Bestimmen Sie dessen Mittelpunkt und Radius.

  Im Folgenden sei eine beliebige Ebene betrachtet, in der die Axiome der Inzidenz, der Anordnung, der Kongruenz sowie der Parallelität gelten.
- Ein Parallelogramm ist ein Viereck, dessen gegenüberliegende Seiten parallel sind. Beweisen Sie, dass diese dann gleichlang sind und die Diagonalen sich halbieren.
- Ein Trapez ist ein Viereck, für das wenigstens ein Paar gegenüberliegender Seiten parallel ist. Die Mittellinie eines Parallelogramms ist die Strecke zwischen den Mittelpunkten der anderen zwei Seiten. Zeigen Sie, dass diese Strecke kongruent zur halben Summe der parallelen Seiten ist.
- Beweisen Sie die Umkehrungen des Peripherie-Zentrumswinkelsatzes: Seien A, B zwei Punkte auf einem Kreis um den Punkt M und C ein Punkt nicht auf der Geraden $G(A, B)$, der mit M auf einer Seite bezüglich $G(A, B)$ liegt. Ist dann $2\angle(ACB) = \angle(AMB)$, so liegt C auch auf dem Kreis. Zeigen Sie die analoge Aussage für den Satz des Thales.
- Sei $ABCD$ ein nicht entartetes Viereck, in dem die gegenüberliegenden Winkel Nebenwinkel sind. Beweisen Sie, dass dies dann ein Sehnenviereck ist.