
Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 1

Geometrie WS 2017/18

Abgabe: 30.10.2017

Aufgabe 1 (4+3+3 Punkte)

- (a) Wieviele verschiedene Inzidenzgeometrien gibt es auf der vierelementigen Menge $\mathcal{E} := \{A; B; C; D\}$? Zwei solche sollen isomorph heißen, falls es eine bijektive Abbildung der Menge auf sich gibt, so dass die Bilder von Geraden wieder Geraden sind. Zwei Inzidenzgeometrien sollen nun nicht unterschieden werden, wenn sie isomorph sind. Wieviele verschiedene Inzidenzgeometrien gibt es dann auf \mathcal{E} ?
- (b) Zeigen Sie die folgende Aussage für Inzidenzgeometrien aus der Vorlesung: Für jeden Punkt gibt es eine Gerade, die diesen Punkt nicht enthält.
- (c) Zeigen Sie die folgende Aussage für Inzidenzgeometrien, für die auch das Abstandsaxiom gilt: Für jeden Punkt gibt es unendlich viele paarweise verschiedene Geraden durch diesen.

Aufgabe 2 (4+3+3 Punkte)

Wir betrachten im Folgenden die Ebene, die durch \mathbb{R}^2 gegeben sei. Die Parabeln der Form $\{(x, (x-a)^2 + b) \mid x \in \mathbb{R}\}$ mit beliebigen reellen Zahlen a und b sowie die zur y -Achse parallelen Geraden, d.h. die Mengen $\{(c, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}$, seien die Geraden.

- (i) Überprüfen Sie die Grundeigenschaften der Inzidenz für Punkte und Geraden in der Ebene.
- (ii) Bestimmen Sie alle Parallelen zu einer beliebigen Geraden und einem Punkt außerhalb dieser.
- (iii) Erfüllt diese Geometrie das Trennungsaxiom? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Abgebrochenes Lineal. Konstruieren Sie die Strecke zwischen zwei Punkten, die 9cm entfernt sind mithilfe eines Zirkels und eines Linealstückchens, das nur 3cm lang ist. Begründen Sie die Korrektheit. Welche geometrischen Sachverhalte benutzen Sie?

Hinweis: Diese Aufgabe beruht auf einfachen Kenntnissen der Geometrie aus der Schule und soll mit diesen gelöst werden.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 23.-25.10. besprochen werden:

- Sei eine Inzidenzgeometrie auf einer Menge \mathcal{E} gegeben, die das Parallelexiom erfülle: Zu jeder Geraden und jedem Punkt, der nicht auf ihr liegt, gibt es höchstens eine Gerade durch diesen Punkt, die die Gerade nicht schneidet, d.h. **parallel** dazu ist. Zeigen Sie: ist g parallel zu h und h parallel zu k , so ist g auch parallel zu k . Bezeichne \mathcal{G} die Menge der Geraden. Zeigen Sie, dass durch folgende Definition auf \mathcal{G} eine Inzidenzgeometrie gegeben ist: jeder Punkt $P \in E$ bestimme eine "Gerade", die aus allen Elementen von \mathcal{G} besteht, die P enthalten. Weiterhin bestimme jedes Element aus \mathcal{G} eine "Gerade", die aus dem Element selbst und allen Elementen von \mathcal{G} besteht, die parallel dazu sind, es sei denn, dass diese Gerade gar keine Parallelen besitzt. Kann es in dieser Inzidenzgeometrie Parallelen geben?
- Überprüfen Sie die Grundeigenschaften der Inzidenz für Punkte und Geraden in der Ebene, wenn die Ebene $E := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist und die kartesischen Kreise und Geraden, die durch die 0 gehen (der Durchschnitt dieser mit $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$) die Menge der Geraden bilden. Sie dürfen dabei natürlich alles Wissen um Kreise und Geraden in \mathbb{R}^2 , benutzen. Bestimmen Sie alle Parallelen zu einer beliebigen Geraden und einem Punkt außerhalb dieser. Erfüllt diese Geometrie das Trennungsaxiom?
- Eingerosteter Zirkel. Halbieren Sie eine Strecke mithilfe eines Lineals (ohne Skalierung) und eines eingerosteten Zirkels. Die Strecke ist dabei mehr als doppelt so groß wie die Spannweite des Zirkels. Begründen Sie die Korrektheit der Konstruktion.
Hinweis: Diese Aufgabe beruht auf einfachen Kenntnissen der Geometrie aus der Schule und soll mit diesen gelöst werden.

Die folgenden Aufgaben dienen der Wiederholung und beruhen auf einfachen Kenntnissen der Geometrie aus der Schule:

- Wiederholen Sie die Ihnen aus der Schule bekannten Kongruenzsätze für Dreiecke. Diskutieren Sie anhand von Beispielen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal von Dreiecken mit gegebenen drei Größen aus der Menge der Innenwinkel und Seitenlängen, insbesondere Konstruierbarkeit/Existenz und Eindeutigkeit.
- Wiederholen Sie die folgenden Begriffe der euklidischen Geometrie und ihre Eigenschaften: Nebenwinkel, Scheitelwinkel, Parallelität, Stufen- und Wechselwinkel an parallelen Geraden, Außenwinkelsatz und Innenwinkelsatz des Dreiecks.
- Wodurch ist ein rechter Winkel definiert? Erinnern Sie sich an die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal der Mittelsenkrechten einer Strecke, des Lotes von einem Punkt auf eine Gerade, der Senkrechten zu einer Geraden durch einen Punkt auf dieser, der Winkelhalbierenden. Wie begründen Sie die Korrektheit dieser Konstruktionen?